Miscelánea Matemática **xx** (xxxx) 0-8 SMM

DOI: xxx

Dos demostraciones de la existencia de las (k, g)-jaulas

Julio César Díaz-Calderón
Instituto de Matemáticas - Campus Juriquilla
Universidad Nacional Autónoma de México
julio_dc@ciencias.unam.mx
y
Diego González-Moreno
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
Universidad Autónoma Metropolitana - Cuajimalpa, México
dgonzalez@cua.uam.mx

1. Introducción

En matemáticas, la necesidad de probar la existencia de objetos fomenta el desarrollo de ideas y de técnicas para hacerlo. La demostración de la existencia de ciertos objetos matemáticos puede ser un asunto muy complicado, por lo que hacerlo es motivo de celebración. En este artículo estudiaremos la existencia de uno de esos objetos matemáticos que surge en la teoría de las gráficas (o grafos) y es conocido como jaulas.

En teoría de las gráficas hay una categoría de problemas del siguiente tipo: dadas las funciones (parámetros) $f_1, f_2, \ldots, f_k$ con dominio en el universo de las gráficas y los valores $c_1, c_2, \ldots, c_k$ para estas funciones, ¿existe una gráfica G para la cual $f_1(G) = c_1, f_2(G) = c_2, \ldots, f_k(G) = c_k$?

Ahora, si se prueba que existen gráficas que cumplen con los valores de las funciones, una pregunta que se hacen las personas que investigan ésta área es encontrar es el mínimo número de vértices que tiene una de ellas.

En este trabajo hablaremos de un problema de esta naturaleza: la existencia de las jaulas. Para ello se consideran dos funciones clásicas de las gráficas: la regularidad y el cuello.

Palabras clave: k-regular, cuello, orden.

Recordemos, una *gráfica* G es una estructura compuesta por un conjunto $V(G)$ de vértices (o nodos) y un conjunto $E(G)$ de aristas (o enlaces) que conectan pares de vértices. El *orden* de G es la cárdinalidad de $V(G)$. El *grado* de un vértice es el número de aristas incidentes a el y dos vértices son *adyacentes* si están conectados con una arista. Una gráfica G es k-*regular* si todos sus vértices son tienen grado k. Un *ciclo* en una gráfica G es una sucesión de vértices adyacentes comienza y termina en el mismo vértice y que no repite aristas o vértices (excepto el inicial y el final). El *cuello* de G es la longitud más pequeña de un ciclo de G.

Dados dos enteros $k \geq 2$ y $g \geq 3$, una (k, g)-*gráfica* es una gráfica k-regular con cuello g. En la figura 1 se muestra una $(3, 4)$-gráfica. Una (k, g)-*jaula* es una (k, g)-gráfica con el menor número posible de vértices. Observa que la existencia de las (k, g)-gráficas implica la existencia de las (k, g)-jaulas.

La pregunta de existencia en este problema es ¿para todo par de enteros $k \geq 2$ y $g \geq 3$, existe una (k, g)-gráfica? Y si existe una (k, g)-gráfica, ¿cuántos vértices tiene la (k, g)-jaula?

En este trabajo utilizaremos $\nu(k, g)$ para denotar al orden de una (k, g)-jaula. Se puede ver que las $(2, g)$-jaulas son los ciclos de longitud g, lo cual implica que $\nu(2, g) = g$. También se puede ver que las $(k, 3)$-jaulas son gráficas completas con $k + 1$ vértices, es decir, K_{k+1} y $\nu(k, 3) = k + 1$. Además, la gráfica bipartita completa $K_{k,k}$ es la $(k, 4)$-jaula y por lo tanto $\nu(k, 4) = 2k$.

Aunque para algunas parejas de enteros k y g se puede encontrar una (k, g)-gráfica, no es claro que esto se pueda hacer para toda pareja (k, g). La prueba de la existencia de las jaulas no es inmediata, y fue probada por primera vez en 1963 por Sachs [7]. Muy poco tiempo después Erdős en conjunto con el mismo Sachs [5] dió una demostración diferente de su existencia. Es curioso ver que estos dos artículos, donde se probó la existencia de las (k, g)-gráficas, se hacen referencia cruzada entre sí.

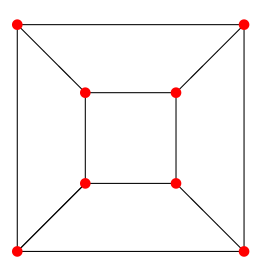

Figura 1. $(3, 4)$-gráfica de orden 8

En este trabajo presentamos dos demostraciones de la existencia de las (k, g)-jaulas con similaridades a los textos canónicos de Sachs y

Erdős en el estudio de las jaulas. Una demostración es no constructiva y la otra es constructiva. También veremos como las ideas aquí presentadas pueden utilizarse para probar la existencia de familias de (k, g)-gráficas que cumplen una propiedad adicional, como ser hamiltoniana.

Ahora, la pregunta sobre el orden de las (k, g)-jaulas es un problema abierto para la mayoría de las parejas de enteros $k \geq 2$ y $g \geq 3$ y ha generado muchos grupos de investigación en todo el mundo. Piensa, por ejemplo, en la $(3, 4)$-jaula. La figura 1 muestra una $(3, 4)$-gráfica de orden ocho, pero la $(3, 4)$-jaula sólo tiene seis vértices. Dicha jaula se puede representar como un hexágono regular con sus tres diagonales del tamaño del diámetro de la cirunferencia circunscrita al hexágono. Una de las referencias más citadas para conocer las múltiples cotas existentes y las variadas técnicas para probar que lo son es el *Dynamic Cage Survey* de Exoo y Jajcay [6].

2. Método de Erdös y Sachs

En esta sección presentamos una prueba no constructiva de la existencia de las (k, g)-gráficas. La demostración que aparece aquí no es la prueba que aparece en el artículo de Erdös y Sachs [5]; en esa se emplea inducción matemática. Sin embargo, las ideas que aparecen en esta prueba tienen un espíritu similar a las utilizadas en el artículo de Erdös y Sachs [5].

La siguiente demostración se la enseñó Victor Neumann a Diego cuando era su alumno de licenciatura y estudiaban las (k, g)-jaulas. Un día, Diego le dijo a Victor que no podía leer la prueba de la existencia de las jaulas porque estaba en alemán. Victor, que sabía alemán, se comprometió a leer la prueba y explicársela la semana siguiente. Diego siempre creyó que la demostración que Victor le había explicado siete días después era la que aparecía en el artículo en alemán de Erdős y Sachs.. Sin embargo, al escribir este artículo y revisar la versión original y la traducción literal de esta prueba que aparece en el apéndice del *Dynamic Cage Survey* de Exoo y Jajcay [6], se dió cuenta de que la demostración es diferente. Creemos que esta versión es más accesible y respeta las ideas de la prueba publicada en alemán por Erdős y Sachs, y por este motivo la presentamos a continuación.

Teorema 2.1 (Existencia de las jaulas)**.** *Dados dos enteros $k \geq 3$ y $g \geq 3$, existe una (k, g)-jaula y*

$$\nu(k, g) \leq 2(k-1) + \sum_{i=1}^{g-2}(k-1)^i + \sum_{i=1}^{g-1}(k-1)^i.$$

Demostración. Sean $k \geq 3$ y $g \geq 2$ enteros, y sea

$$n = 2(k-1) + \sum_{i=1}^{g-2}(k-1)^i + \sum_{i=1}^{g-1}(k-1)^i.$$

Ahora, considera el conjunto $\mathcal{G}$ compuesto por todas las gráficas de orden n, cuello g y grado máximo a lo más k. Se puede ver que $\mathcal{G} \neq \emptyset$, ya que la gráfica que formada por un ciclo de longitud g y $n-g$ vértices aislados pertenece a $\mathcal{G}$.

Para cada gráfica G en $\mathcal{G}$ definimos el conjunto $M(G)$ formado por los vértices de grado menor a k, así

$$M(G) = \{v \in V(G) \mid d(v) < k\}.$$

Y, denotamos por $m(G)$ a la distancia máxima entre los vértices de $M(G)$.

De entre todas las gráficas en $\mathcal{G}$ elegimos una gráfica G con el mayor número de aristas, que maximiza la cardinalidad de $M(G)$ y que sujeta a estas condiciones cumpla que la distancia $m(G)$ sea la más grande posible. Si logramos ver que $M(G) = \emptyset$, entonces la demostración estará terminada.

Sean u y v vértices en $M(G)$ tales que $d(u,v) = m(G)$ (si $|M(G)| = 1$, entonces $u = v$ y $d(u,v) = m(G) = 0$).

Afirmamos que $m(G) \leq g-2$. Si $m(G) \geq g-1$, entonces la gráfica que se obtiene al agregar a G la arista uv tiene más aristas que G y mantiene el cuello g (pues estamos suponiendo que $d(u,v) \geq g-1$) y como $d_G(u) < k$ y $d_G(v) < k$, entonces $G + uv$ es una gráfica en $\mathcal{G}$ con más aristas que G, lo cual no es posible.

Utilicemos W para denotar al conjunto de todos los vértices w de G tales que $d(u,w) \leq g-2$ o $d(v,w) \leq g-1$.

Nota que el número de vértices a distancia a lo más $g-2$ de u tiene cardinalidad a lo más

$$1 + \sum_{i=1}^{g-2}(k-1)^i.$$

De igual manera, los vértices a distancia a lo más $g-1$ de v son a lo más

$$1 + \sum_{i=1}^{g-1}(k-1)^i.$$

Por lo tanto,

$$|W| \leq 2 + \sum_{i=1}^{g-2}(k-1)^i + \sum_{i=1}^{g-2}(k-1)^i.$$

Como $n > |W|$, existe x en $V(G)$ que no pertenece a W. Entonces, $d(u,x) \geq g-1$ y $d(v,x) \geq g$. Como $d(u,x) \geq g-1 > m(G)$, tenemos que

$x \notin M(G)$ y por lo tanto $d(x) = k$. Por hipótesis $k \geq 3$, entonces existe una arista e incidente a x tal que al quitarla de G no alteramos el cuello. Supongamos que $e = xx'$. Como $d(v, x') \geq d(v, x) - 1 \geq g - 1 > m(G)$ se sigue que $x' \notin W$ y $d(x') = k$.

Tomemos la gráfica $G^* = G - xx' + ux$. Observa que G^* pertenece a $\mathcal{G}$ y como $|E(G^*)| = |E(G)|$, entonces tiene el máximo posible número de aristas. Además, $x' \in M(G^*)$ (pues perdió una arista) y $M(G^*)$ contiene a todos los vértices de $M(G)$, con la posible excepción de u. Como $|M(G^*)| \leq |M(G)|$ (pues asi escogimos a G), se sigue que $u \notin M(G^*)$. Por lo tanto $d_{G^*}(u) = k$ y $|M(G^*)| = |M(G)|$.

Si $|M(G^*)| = 1$, entonces $M(G^*) = \{x'\}$ y se sigue que $M(G) = \{u\}$ y $u = v$. Como $d_{G^*}(u) = k$, entonces $d_G(u) = k - 1$. Por lo tanto G tiene exactamente un vértice de grado $k - 1$ y $n - 1$ vértices de grado k. Entonces $k - 1$ y $n - 1$[1] son pares, pero como n es múltiplo de $k - 1$ obtenmos una contradicción.

Si $|M(G^*)| \geq 2$, entonces $v, x' \in M(G^*)$ y $d_{G^*}(v, x') \leq m(G^*) \leq m(G) \leq g - 2$.

Sea P una vx'-trayectoria de longitud mínima en G^*. Si P está contenida en G, entonces tendría longitud al menos $g - 1$, lo cual es una contradicción. Entonces P contiene la arista ux. Entonces P tiene una vu-trayectoria contenida en G de longitud al menos $m(G)$ o una vx-trayectoria contenida en G de longitud al menos $g > m(G)$. En los dos casos la longitud de P es más grande que $m(G^*)$, que es una contradicción. Por lo tanto $M(G) = \emptyset$. $\square$

3. Método de Sachs

Si bien el método de la sección anterior nos permite demostrar la existencia de las (k, g)-gráficas para cualquier par de valores enteros $k \geq 3$ y $g \geq 3$, no nos permite encontrar cuáles son las (k, g)-gráficas. En esta sección, veremos una forma de construirlas de manera inductiva.

Julio hizo esta adaptación de la demostración de la existencia de las (k, g)-gráficas en el artículo de Sachs cuando empezó a estudiar las jaulas con Gabriela Araujo Pardo durante la licenciatura. Se dió cuenta que aunque existía una tradición larga del estudio de las jaulas en México, las personas con las que habló no conocían los detalles de la construcción de Sachs [7]. En ese momento, le parecía imperativo entender la construcción de Sachs de las (k, g)-gráficas pese a que tienen más vértices que las cotas superiores conocidas del número de vértices de las (k, g)-jaulas. Esto se debía a que intentaría construir otras

[1] Este hecho se sigue de que en toda gráfica el número de vértices de grado impar siempre es par

gráficas con menos vértices a partir de las de Sachs usando las técnicas que había aprendido de Gaby sobre cómo construir gráficas con menos vértices a partir de las gráficas que se obtienen de geometrías finitas, ver [1, 2].

La construcción que presentó Sachs, hasta donde sabemos, es la única construcción de una (k,g)-gráfica que no utiliza herramientas algebraicas. Para ver construcciones algebraicas de (k,g)-gráficas se recomienda revisar los trabajos de Biggs [3, 4]. A diferencia de la demostración de Sachs, esta construcción no admite aristas múltiples y consideramos que es más accesible.

Teorema 3.1 (Sachs)**.** *Dados dos enteros $k \geq 2$ y $g \geq 3$, existe una (k,g)-gráfica G, la cual tiene un ciclo hamiltoniano*[2].

Demostración. Para $k = 2$ y $g \geq 3$, el ciclo de longitud g cumple con las condiciones del teorema. Ahora, para $k = 3$ y $g = 3$, la gráfica completa K_{k+1}, también satisface el teorema.

Probaremos el resto del teorema utilizando una doble inducción. Primero hagamos inducción sobre g. Tomemos como primera hipótesis de inducción que existe una (k,g)-gráfica para todo par de enteros $3 \leq g < g_0$ y $k \geq 2$. Demostremos que si se cumple ésta hipótesis, entonces existe una (k,g_0)-gráfica para cualquier entero $k \geq 2$. Para ésto, haremos inducción sobre k. Así, tomemos como segunda hipótesis de inducción que existe una (k,g_0)-gráfica para todo entero $2 \leq k < k_0$. Demostraremos que si se cumple esta segunda hipótesis, entonces existe una (k_0,g_0)-gráfica. Dado que ya se sabe que existen (k,g)-gráficas para $g = 3$ y $k = 2$, los casos base de ambas inducciones están cubiertos y se puede asumir que $g_0 > 3$ y que $k_0 > 2$.

Por la segunda hipótesis de inducción existe una gráfica, G^*, que es (k_0-1)-regular, tiene cuello g_0 y es hamiltoniana. Sean $d_1, d_2, \ldots, d_r$ los vértices de un ciclo hamiltoniano G^*, al cuál denotaremos por $C(G^*)$, donde los subíndices están en orden cíclico respecto al ciclo hamiltoniano. Ahora, por la primera hipótesis de inducción se sabe que existe una gráfica, H, r-regular, hamiltoniana con cuello $g_0 - 1$. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_s$ los vértices de un ciclo hamiltoniano de H, al cual denotaremos por $C(H)$, y donde los subíndices están en orden cíclico respecto al ciclo hamiltoniano.

Sean $G_1^*, \ldots, G_s^*$ copias (gráficas isomórfas[3]) de G. Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, sean $d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ir}$ una forma de etiquetar los vértices de G_i^* de manera que la función $\tau_i : \{d_1, d_2, \ldots, d_r\} \to \{d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ir}\}$,

[2]Una gráfica G es hamiltoniana si contiene un ciclo que utiliza a todos los vértices de G. Un ciclo que utiliza a todos los vértices de una gráfica se conoce como ciclo hamiltoniano.

[3]Una gráfica isomórfa, F, de F^* es una gráfica tal que existe una función biyectiva $f : V(F) \to V(F^*)$ con la propiedad de que $(u,v) \in E(F)$ si y solo si $(f(u), f(v)) \in E(F^*)$. Toda función f que cumple las condiciones de la oración anterior se conoce como un isomorfismo entre F y F^*.

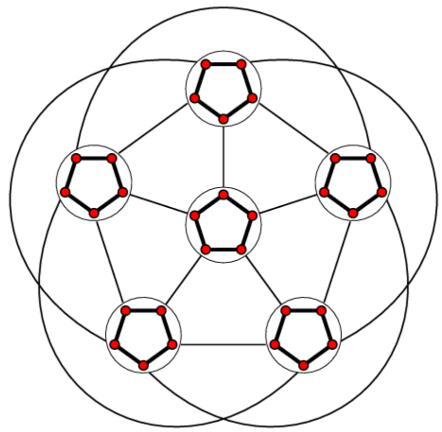

Figura 2. Construcción de las aristas para $G^* = C_5$ y $H = K_6$ en [6]

definida como $\tau_i(d_j) = d_{ij}$, es un isomorfismo entre G^* y G_i^*. Es inmediato de la definición que $d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ir}$ (en ese orden) son los vértices de un ciclo hamiltoniano, $C(G_i^*)$, de G_i^*, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Ahora vamos a construir una (k_0, g_0)-gráfica hamiltoniana, que llamaremos G. Como observación (y para que exista una imagen clara de la construcción de G), la idea es reemplazar los vértices de H por copias de G^* y colocar las aristas correspondientes a H de manera adecuada, ver figura 2. Sea G la gráfica cuyos vértices son la unión de los vértices de las copias $G_1^*, \ldots, G_s^*$.Las adyacencias de G se crean de la siguiente manera:

1. d_{ij} será adyacente a los vértices adyacentes que tiene en G_i^*, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ y cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$.
2. d_{xr} será adyacente a $d_{(x+1)1}$, para toda $x \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$. Además, d_{sr} será adyacente a d_{11}. Estas aristas representan a $C(H)$. Observe que los dos primeros puntos implican que
$$(d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{1r}, d_{21}, d_{22}, \ldots, d_{2r}, d_{31}, \ldots, d_{(s-1)r}, d_{s1}, \ldots, d_{sr}, d_{11})$$
es un ciclo hamiltoniano.
3. Definimos $G_i' = G_i^* - d_{i1} - d_{ir}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. El número de vértices de G' es $r-2$ y el grado de cada vértice en H menos los dos grados del ciclo hamiltoniano es $r-2$. Por tanto, es posible escoger aristas de los vértices de G de tal forma que si $v_x v_y \in E(H) \setminus C(H)$, entonces existe una arista de v_x' a v_y' con $v_x' \in V(G_x')$ y $v_y' \in V(G_y')$ y de tal forma que estas nuevas aristas se distribuyan de manera que cada vértice de $G_1', G_2', \ldots, G_s'$ sea adyacente a exactamente otro vértice.

Dado que cada vértice tiene $k_0 - 1$ vecinos de la copia G^* en la que está y un vecino a otra copia de G^* por las reglas de incidencia dadas por

H, entonces cada vértice tiene k_0 vecinos. Además, por construcción,

$$(d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{1r}, d_{21}, d_{22}, \ldots, d_{2r}, d_{31}, \ldots, d_{(s-1)r}, d_{s1}, \ldots, d_{sr}, d_{11})$$

es un ciclo hamiltoniano.

Ahora, dado un ciclo $\mathcal{C}$ con el menor número posible de vértices en G hay dos posibilidades: 1) que todos sus vértices estén en G_i^*, para algún $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ o 2) que no lo estén. En el primer caso es suficiente con recordar que el cuello de G_i^* es g_0 para ver que $\mathcal{C}$ tiene al menos g_0 aristas. Para el segundo caso basta notar que se puede crear una trayectoria cerrada en H, $\mathcal{C}'$, a partir de $\mathcal{C}$. Para construir $\mathcal{C}'$ basta con tomar un vértice por cada copia de G y las aristas $v_x v_y$ entre esos vértices corresponden a cada transición en $\mathcal{C}$ entre un vértice de G_x^* a uno en G_y^*. Dado que el cuello de H es g_0, entonces $\mathcal{C}'$ tiene al menos g_0 aristas. Por tanto, $\mathcal{C}$ tiene al menos g_0 aristas (pues tiene las aristas de transición entre copias de G más aristas dentro de cada copia). Por tanto, el cuello de G es al menos g_0. No obstante, como cualquier ciclo mínimo de G_1^* está en G, entonces existe un ciclo de g_0 aristas (el cuello de G_1^*) en G. En conclusión, el cuello de G es g_0, con lo que se termina el paso inductivo. $\square$

4. Perspectivas de investigación

Las dos demostraciones presentadas en este artículo contienen ideas que pueden ser útiles para demostrar la existencia de gráficas que cumplen con ciertas propiedades. Las ideas aquí descritas fueron utilizadas en un artículo reciente que escribimos conjuntamente con Gabriela Araujo-Pardo, Julián Fresán, Linda Lesniak y Mika Olsen [**?**]. En dicho texto, utilizamos las técnicas de ambas demostraciones para probar la existencia de familias infinitas de (k,g)-gráficas que, además, tienen un número cromático dado.[4] Es decir, resolvimos el problema de la existencia de gráficas para algunos valores de tres funciones clásicas: la regularidad, el cuello y el número cromático.

Nuestra investigación reciente nos hizo reevaluar los ejercicios realizados en la licenciatura y volver a los textos canónicos de un área de las matemáticas (el estudio de jaulas en la teoría de gráficas) para explorar las ideas y construcciones que fueron olvidadas. Nos dimos cuenta de que esas ideas y construcciones pueden servir de inspiración para resolver problemas de investigación matemática actual. Crear espacios para estos ejercicios de memoria y de aprendizaje, entonces, puede convertirse en un camino importante para la formación matemática. A su vez, hacer el esfuerzo por identificar, nombrar y prestar atención a lo

[4]El número cromático de una gráfica es el menor número de colores necesarios para colorear los vértices de la gráfica de forma que no haya dos vértices adyacentes del mismo color.

que tomamos como çonocimiento existente"puede enriquecer nuestra investigación y darnos nuevos resultados y perspectivas.

Bibliografía

[1] G. Araujo-Pardo y J. J. Montellano-Ballesteros, «Cages: constructions and new upper bounds», en *8th International Symposium on Parallel Architectures,Algorithms and Networks (ISPAN'05)*, Dec 2005, doi:10.1109/ISPAN.2005.23, 4 pp.–.

[2] G. Araujo-Pardo, D. González, J. J. Montellano-Ballesteros, y O. Serra, «On upper bounds and connectivity of cages», *Electronic Notes in Discrete Mathematics* vol. 28 (2007) 137 – 140, doi:https://doi.org/10.1016/j.endm.2007.01.019, 6th Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications.

[3] N. L. Biggs, «Girth and residual finiteness», *Combinatorica* vol. 8 (1988) 307–312, doi:/10.1007/BF02189087.

[4] ———, «Cubic graphs with large girth», *Combinatorial Mathematics: Proceedings of the Third International Conference* vol. 555 (1989) 56–62, doi:/10.1111/j.1749-6632.1989.tb22437.x.

[5] P. Erdös y H. Sachs, «Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl», *Wiss. Z. Uni. Halle (Math. Nat.)* vol. 12 (1963) 251–257.

[6] G. Exxo y R. Jajcay, «Dynamic Cage Survey», *The Electronic Journal of Combinatorics* vol. DS16 (2013) 1–55, doi:10.37236/37.

[7] H. Sachs, «Regular Graphs with Given Girth and Restricted Circuits», *J. London Math. Soc.* vol. s1-38 (1963) 423–429, doi:10.1112/jlms/s1-38.1.423.