

# Teoría de la gráficas

Mayo 2023



# Índice general

<b>I</b>	<b>7</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
Introducción . . . . .	9
1.1. Gráficas y modelos . . . . .	9
1.2. Las gráficas y sus definiciones básicas . . . . .	12
1.2.1. Isomorfismos . . . . .	15
1.2.2. Algunas gráficas especiales . . . . .	16
1.2.3. Operaciones con gráficas . . . . .	17
1.2.4. Caminos, trayectorias y ciclos . . . . .	20
1.2.5. Sucesiones de grados . . . . .	22
1.3. Ejercicios . . . . .	24
<b>2. Árboles</b>	<b>27</b>
2.1. El origen de los árboles . . . . .	27
2.2. Árboles . . . . .	27
2.3. Árboles generadores de peso mínimo . . . . .	32
2.4. Ejercicios . . . . .	36
<b>3. Conexidad</b>	<b>37</b>
3.1. Vértices de corte . . . . .	37
3.1.1. Bloques . . . . .	40
3.2. Conexidad de una gráfica . . . . .	43
3.3. Teorema de Menger . . . . .	47
3.4. Ejercicios . . . . .	53
<b>4. Recorridos</b>	<b>55</b>
4.1. Gráficas Eulerianas . . . . .	55
4.1.1. Los puentes de Königsberg . . . . .	55
4.2. Gráficas Eulerianas . . . . .	57
4.3. Gráficas Hamiltonianas . . . . .	58
4.4. Ejercicios . . . . .	64

<b>5. Apareamientos y factorización</b>	<b>65</b>
5.1. Apareamientos . . . . .	65
5.1.1. Apareamientos perfectos . . . . .	68
5.1.2. Factorización . . . . .	74
5.2. Ejercicios . . . . .	78
<b>6. Planaridad</b>	<b>79</b>
6.0.1. Propiedades geométricas . . . . .	79
6.0.2. Identidad de Euler . . . . .	82
6.0.3. Teorema de Kuratowski . . . . .	85
6.1. Ejercicios . . . . .	88
<b>7. Coloraciones</b>	<b>89</b>
7.1. Coloración por vértices . . . . .	89
7.1.1. Coloración por aristas . . . . .	97
<b>II Digráficas</b>	<b>103</b>
<b>8. Digráficas</b>	<b>105</b>
8.1. Primeros conceptos . . . . .	105
8.2. Conexidad . . . . .	109
8.3. Digráficas fuertemente conexas . . . . .	112
8.4. Digráficas Eulerianas . . . . .	114
8.5. Digráficas Hamiltonianas . . . . .	115
8.6. Torneos . . . . .	119
8.6.1. Torneos Transitivos . . . . .	119
8.6.2. Distancia en Torneos . . . . .	121
8.6.3. Reyes en torneos . . . . .	122
8.7. Núcleos . . . . .	125
8.7.1. Cuasi núcleos . . . . .	126
<b>9. Teoría extremal de gráficas</b>	<b>129</b>
9.1. Teorema de Turán y algunos problemas extremales . . . . .	129
9.1.1. Ciclos ajenos . . . . .	134
9.1.2. Jaulas . . . . .	137
9.2. Coloraciones monocromáticas y arcoris . . . . .	144
9.2.1. Números de Ramsey . . . . .	144
9.2.2. Números de Ramsey arcoíris . . . . .	158

<b>10. Dominación en gráficas</b>	<b>171</b>
10.1. Conjunto dominante minimal . . . . .	171
10.2. Conjetura de Vizing . . . . .	175
10.3. Conjunto dominante independiente . . . . .	177
10.4. Dominación total . . . . .	179
10.4.1. De dominación total en gráficas a transversales en hi- pergráficas . . . . .	179
10.4.2. Algunas propiedades de $TD$ -conjuntos . . . . .	180
10.4.3. Algunas cotas de $\gamma_t(G)$ . . . . .	182
10.5. Dominación Romana . . . . .	184
10.6. $k$ -Dominación . . . . .	187
<b>11. Teoría algebraica de gráficas</b>	<b>191</b>
11.1. Homomorfismos . . . . .	191
11.1.1. Cocientes . . . . .	194
11.1.2. Retracciones . . . . .	196
11.1.3. Cores . . . . .	197
11.2. Equivalencia homomórfica . . . . .	198
11.3. Gráficas transitivas en vértices . . . . .	199
11.4. Gráficas transitivas en aristas . . . . .	202



# Parte I



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Gráficas y modelos

Las gráficas son objetos matemáticos que pueden modelar muchas situaciones. De manera informal podemos pensar a éstas como un conjunto de puntos y líneas que conectan ciertos puntos. Antes de dar la definición de gráfica veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.** Considera una cuadrícula de  $8 \times 8$  y un conjunto de fichas de dominó, cada una de las cuales cubre exactamente dos casillas de la cuadrícula, como se ve en la figura 1.1.

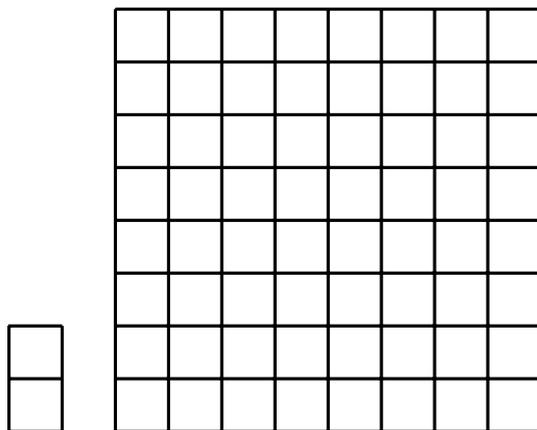


Figura 1.1: Cuadrícula de  $8 \times 8$  y ficha de dominó.

El objetivo es cubrir toda la cuadrícula utilizando las fichas de dominó. En el caso de la cuadrícula de  $8 \times 8$  te podrás dar cuenta que sí se puede cubrir todo el tablero utilizando las fichas de dominó.

Para hacer más interesante el problema, quita del tablero algunas casillas y obtén un nuevo tablero, por ejemplo, el que se muestra en la figura 1.2.

¿Se puede cubrir la cuadrícula modificada utilizando las fichas de dominó?

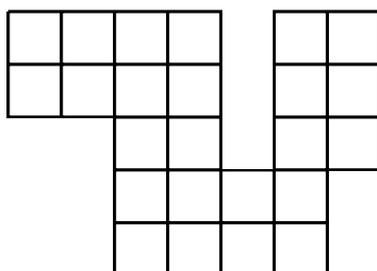


Figura 1.2: Cuadrícula después de borrar algunos cuadradados.

Para resolver este problema puede ser de ayuda agregar un elemento extra en la situación. Si pensamos la cuadrícula como una tablero de ajedrez en el cual las casillas alternan en color (ver figura 1.3).

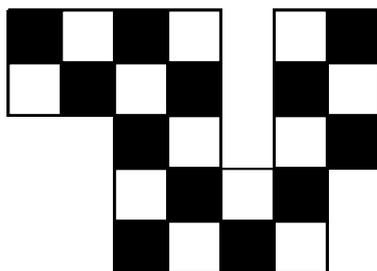


Figura 1.3: Cuadrícula coloreada.

Como cada ficha de dominó cubre una casilla blanca y una negra, una condición que se debe cumplir para que podamos cubrir el tablero con las fichas de dominó es que el número de casillas blancas debe ser igual al número de casillas negras. Sin embargo, ésta condición no es suficiente para poder resolver el problema. Por ejemplo, en el tablero que aparece en la figura 1.4 hay el mismo número de casillas blancas y negras y no puede cubrirse con las fichas de dominó.

Para encontrar una condición sobre las propiedades que debe cumplir la cuadrícula para ser cubierta con las fichas de dominó, vamos a modelar la situación utilizando un conjunto de puntos y rayitas, es decir, una gráfica. Considera un punto por cada casilla del tablero y conectemos dos puntos con una rayita (arista) si las casillas correspondientes pueden ser cubiertas con

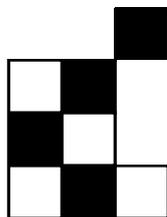


Figura 1.4: Cuadrícula que no puede ser cubierta con las fichas de dominó.

una ficha de dominó. Entonces, para el tablero que aparece en la figura 1.2 tenemos la configuración que aparece en la figura 1.3.

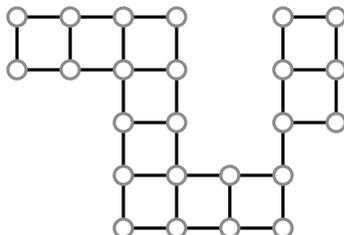


Figura 1.5: Cuadrícula de  $5 \times 7$  modificada.

En éste modelo, las fichas de dominó corresponden a las aristas, y un cubrimiento del tablero con las fichas de dominó, en el modelo, es un conjunto de aristas que contienen a todos los puntos y que no tienen puntos en común.

Se puede ver en la gráfica (ver figura 1.6) asociada a la cuadrícula que aparece en la figura 1.4 no se puede encontrar un conjunto de aristas con las condiciones necesarias.

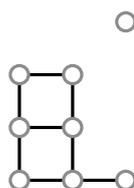


Figura 1.6: Modelo asociado a al tablero de la figura 1.4.

Las gráficas pueden modelar situaciones en las cuales participe un conjunto y una relación entre los elementos del conjunto. Por ejemplo, podemos estudiar un conjunto formado por un grupo de personas y la relación de amistad.

**Ejemplo 2.** Considera un grupo de personas y vamos a asociarle a ellos el siguiente modelo: colocamos un punto (vértice) por cada persona del grupo

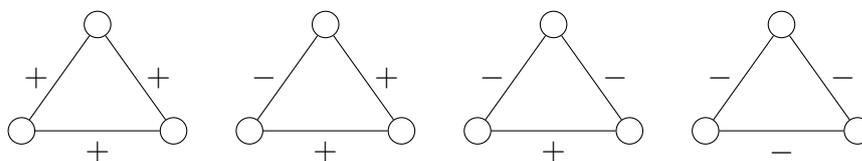


Figura 1.7: Todas las posibles configuraciones de un sociograma signado con tres personas que se conocen entre sí.

y unimos dos puntos con una línea (arista) si las personas (correspondientes a los vértices) se conocen entre sí. Aquí estamos suponiendo que la relación “conocer” es simétrica, es decir, si  $A$  conoce a  $B$ , entonces  $B$  también conoce a  $A$ . Para hacer más detallado este análisis podemos colocar un signo  $+$  o  $-$  sobre una línea  $AB$  si la relación entre  $A$  y  $B$  es buena o mala, respectivamente.

En la figura 1.7 se muestran todas las posibilidades que puede tener un conjunto de tres personas que se conocen entre sí. A este modelo se le conoce como *sociograma signado*.

Otro ejemplo importante que utiliza a las gráficas para modelar una situación son las redes de afiliación.

**Ejemplo 3.** Considera dos conjuntos, el conjunto de todas las personas que han salido en alguna película en Hollywood y el conjunto de todas las películas realizadas en Hollywood. Vamos a asociarle a estos conjuntos una gráfica, la cual va a tener dos tipos de vértices los vertices asociados a las personas y los vértices asociados a las películas. Pondremos una línea entre dos vértices  $u$  y  $v$  (de distinto tipo) si la persona  $u$  participó en la película  $v$ . En la figura 1.8 se muestra una pequeña parte de esta red de afiliación.

## 1.2. Las gráficas y sus definiciones básicas

Después de los ejemplos que hemos visto, estamos listos para dar la definición formal de gráfica.

**Definición 1.2.1.** Una *gráfica* es una pareja ordenada  $(V(G), A(G))$  que consta de un conjunto no vacío  $V(G)$  de *vértices* (puntos) y de un conjunto  $A(G)$  de parejas no ordenadas de elementos de  $V(G)$ , a los elementos de dicho conjunto les llamamos *aristas* (rayitas).

En la figura 1.9 se muestra un ejemplo de una gráfica  $G$  con conjunto de vertices  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$  y conjunto de aristas  $A(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_7, v_8\}\}$ .

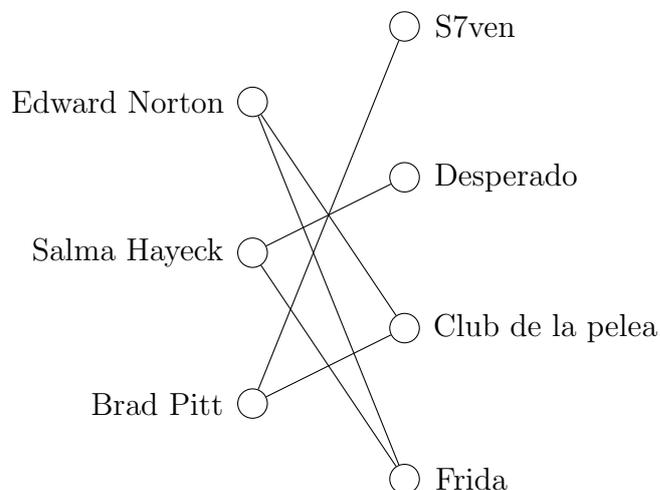


Figura 1.8: Parte de la red de filiación de Hollywood.

Una arista  $\{u, v\}$  será denotada por  $uv$ . Una arista de la forma  $uu$  es un **lazo**. A las aristas repetidas en  $A(G)$  se les conoce como aristas paralelas.

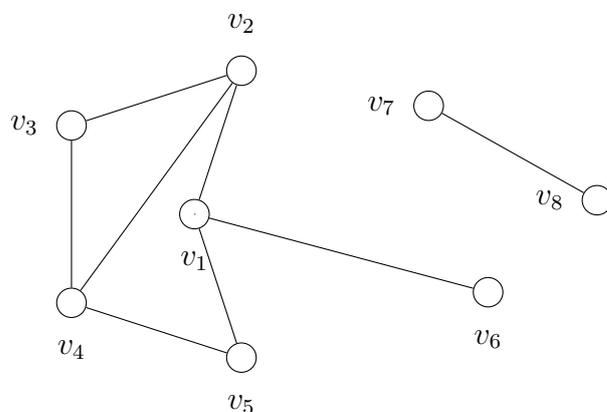


Figura 1.9: Ejemplo de una gráfica.

A una gráfica con lazos y aristas paralelas se le conoce como **multigráfica**. Una gráfica es **simple** si no contiene lazos y aristas paralelas. En la figura 1.10 se muestra una multigráfica con un lazo y dos aristas paralelas.

El **orden** de una gráfica  $G$  es el número de vértices y el **tamaño** de la gráfica es el número de aristas.

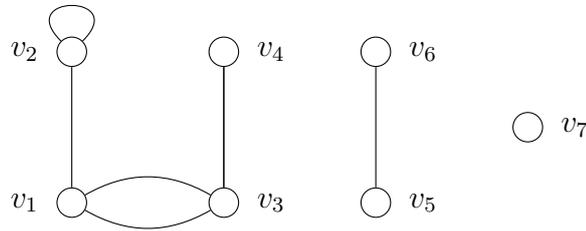


Figura 1.10: Ejemplo de una multigráfica.

Sea  $v \in V(G)$ . La **vecindad** de  $v$  en  $G$  es el conjunto:

$$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in A(G)\}.$$

El **grado** de  $v$ , que denotamos con  $d_G(v)$ , es el número de vecinos de  $v$ , es decir,  $d_G(v) = |N_G(v)|$ . Si el contexto es claro, utilizaremos  $d(v)$  y  $N(v)$  en lugar de  $d_G(v)$  y  $N_G(v)$ . Si  $d_G(v) = 0$ , se dice que  $v$  es un **vértice aislado** de  $G$ , y si  $d_G(v) = 1$ , se dice que  $v$  es una **hoja** de  $G$ .

El **grado mínimo** de una gráfica  $G$  es

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Así mismo, el **grado máximo** de una gráfica  $G$  es:

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Una gráfica  $G$  es  **$k$ -regular** si  $\delta(G) = \Delta(G) = k$ .

Estamos preparados para probar el primer resultado en teoría de las gráficas que relaciona el número de aristas en una gráfica y los grados de sus vértices.

**Teorema 1.2.1** (Apretón de manos). Sea  $G$  una gráfica, entonces

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|A(G)|.$$

*Demostración.* Si sumamos los grados de todos los vértices de una gráfica, se puede ver que cada arista  $e = uv$  se cuenta dos veces (una vez cuando contamos el grado de  $u$  y otra al contar el grado de  $v$ ).  $\square$

El teorema anterior también es conocido como el Teorema de los Apretos de Manos pues se puede formular de la siguiente forma:

En toda fiesta el número total de apretos de manos que se dan cuando las personas se saludan es par.

Como consecuencia de este teorema podemos probar la siguiente propiedad que cumplen todas las gráficas.

**Corolario 1.2.1.** En toda gráfica, el número de vértices de grado impar es par.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica con  $m$  aristas. Sea  $A$  el conjunto de los vértices de  $G$  que tienen grado par y  $B$  el conjunto de los vértices de  $G$  de grado impar. Por el teorema 1.2 sabemos que

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{v \in A} d(v) + \sum_{v \in B} d(v).$$

Considerando la parte derecha de la igualdad, el primer sumando sólo está formado de la suma de números pares, por lo tanto el resultado de esa sumatoria es un número par. Como la suma de ambos sumandos es un número par, entonces tenemos que el segundo sumando también debe ser par, y eso sucede si y sólo si el número de vértices de grado impar es par.  $\square$

Escribiendo el corolario anterior en términos de saludos en una fiesta tenemos que:

*en toda fiesta el número de personas que dan un número impar de apretones de manos es par.*

### 1.2.1. Isomorfismos

Hemos visto que una gráfica puede representarse con un dibujo que consta de puntos y líneas, además, el dibujo determina completamente a la gráfica, pues a partir de él se pueden obtener los vértices y las aristas de la gráfica. También nota que podemos dibujar de formas muy distintas la misma gráfica. Por ejemplo, sea  $G$  la gráfica con conjunto de vértices  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  y aristas  $A(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$ . En la figura 1.11 aparecen dos formas distintas de dibujar la misma gráfica. Es importante observar que los dos dibujos son distintos pero vistos como gráficas son iguales. A esta idea se le conoce como isomorfismo.

**Definición 1.2.2.** Dos gráficas  $G$  y  $H$  son **isomorfas**, en símbolos  $G \cong H$ , si y solamente si existe una biyección  $\varphi$  que preserva las adyacencias, es decir, todo  $u, v \in V(G)$ , se sigue que

$$uv \in A(G) \text{ si y sólo } \varphi(u)\varphi(v) \in A(H).$$

A la función  $\varphi$  se le llama **isomorfismo**.

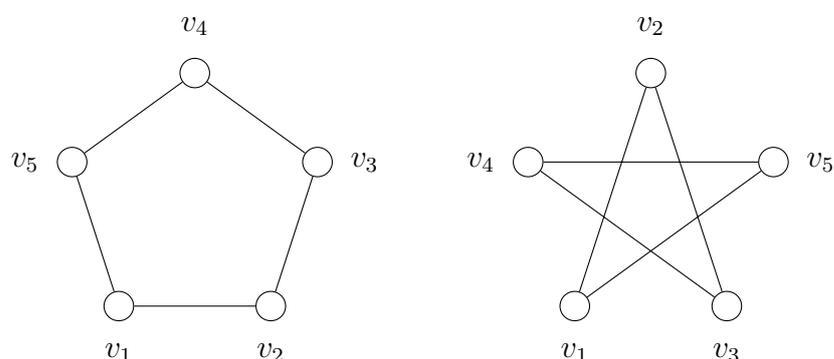


Figura 1.11: La misma gráfica dibujada de dos maneras diferentes.

Observa que de la definición de isomorfismo se sigue que si  $G$  y  $H$  son dos gráficas isomorfas, entonces  $G$  y  $H$  tienen el mismo orden, el mismo tamaño, el mismo grado mínimo, grado máximo, y mismo número de vértices de un cierto grado, entre otras cosas.

### 1.2.2. Algunas gráficas especiales

Considera un conjunto de vértices  $S$ . La gráfica  $K_S$  es la **gráfica completa** sobre  $S$  si cualesquiera dos vértices de  $S$  son adyacentes entre sí. En la figura 1.12 se muestra la gráfica completa  $K_5$ . Como todas las gráficas completas de orden  $n$  son isomorfas entre sí, éstas se denotan simplemente como  $K_n$ . Observa que  $K_n$  es una gráfica  $(n - 1)$ -regular. El tamaño de la gráfica completa  $K_n$  es el número de subconjuntos de cardinalidad dos de un conjunto con  $n$  elementos, es decir,

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

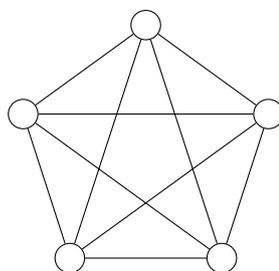


Figura 1.12: Gráfica completa con 5 vértices.

La **gráfica trivial** es la gráfica con exactamente un vértice. Una gráfica  $G$  es **discreta** si  $A(G) = \emptyset$ . Observa que una gráfica discreta es 0-regular.

Una gráfica  $G$  es **bipartita** si podemos encontrar dos subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $V(G)$  tales que cumplen las siguientes condiciones:

1.  $A \cup B = V(G)$ ,
2.  $A \cap B = \emptyset$ .
3. Si  $uv \in A(G)$ , entonces  $u \in A$  y  $v \in B$ .

El modelo que vimos en el ejemplo 3 es un ejemplo de una gráfica bipartita. Además, la gráfica bipartita  $G$  es completa si para todo vértice  $u \in A$  y  $v \in B$  se tiene que  $uv$  es una arista de  $G$ . Si  $|A| = n$  y  $|B| = m$ , denotamos a la gráfica bipartita completa como  $K_{n,m}$ . En la figura 1.13 se muestra la gráfica bipartita completa  $K_{4,4}$ .

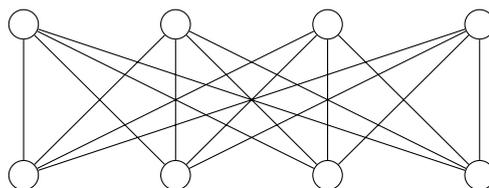


Figura 1.13: Gráfica bipartita  $K_{4,4}$ .

### 1.2.3. Operaciones con gráficas

También se pueden definir operaciones entre gráficas para obtener nuevas gráficas. En esta sección presentamos algunas operaciones básicas que se pueden realizar con una gráfica.

**Definición 1.2.3.** El **complemento** de una gráfica  $G$  es la gráfica  $\overline{G} = (V(\overline{G}), A(\overline{G}))$ , donde  $V(\overline{G}) = V(G)$  y  $uv \in A(\overline{G})$  si y solo si  $uv \notin A(G)$ . En la figura 1.14 se muestra una gráfica y su complemento.

Los complementos de las gráficas completas son llamadas **gráficas discretas**.

Una definición muy importante es la de subgráfica.

**Definición 1.2.4.** Una gráfica  $H$  es una **subgráfica** de una gráfica  $G$ , denotado con  $H \subseteq G$ , si y solo si

- $V(H) \subseteq V(G)$ ,

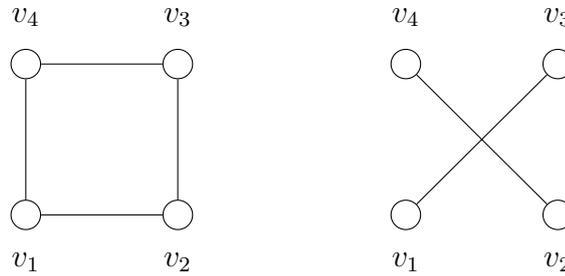
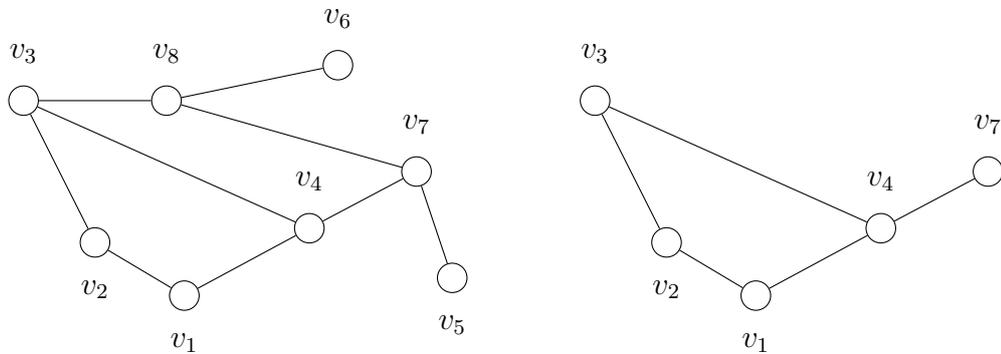


Figura 1.14: Una gráfica y su complemento.

Figura 1.15: Una gráfica y la subgráfica inducida por  $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$ .

- $A(H) \subseteq A(G)$ .

Una subgráfica  $H \subseteq G$  es una **subgráfica propia** si  $V(H) \subsetneq V(G)$ . Una subgráfica  $H \subseteq G$  es una **subgráfica inducida** si  $A(H) = A(G) \cap A(V(H))$ . En este caso se dice que  $H$  está inducida por su conjunto de vértices  $V(H)$ .

Una subgráfica  $H \subseteq G$  **genera** a  $G$  (y  $H$  es una **subgráfica generadora de  $G$** ) si todo vértice de  $G$  está en  $H$ , es decir,  $V(H) = V(G)$ .

- A todo subconjunto  $B \subseteq V(G)$ , con  $B \neq \emptyset$ , le corresponde una subgráfica inducida:  $G[B] = (B, A(G) \cap A(B))$ .
- A todo subconjunto  $F \subseteq A(G)$  le corresponde una única subgráfica generadora de  $G$ ,  $G[F] = (V(G), F)$ .

En la figura 1.15 se muestra una gráfica y la gráfica inducida por el subconjunto de vértices  $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$ .

Otra operación es la eliminación de vértices o aristas. Si  $G$  es una gráfica y  $F \subseteq A(G)$ , denotamos con  $G - F$  a la gráfica  $G[A(G) \setminus F]$ , es decir, la gráfica

que se obtiene al quitar todas las aristas de  $F$ . En particular, si  $F = \{e\}$ , tenemos que  $G - e = G[A(G) \setminus \{e\}]$ .

También, de manera similar, podemos agregar aristas a una gráfica  $G$ . Escribimos  $G + F$  para denotar a la gráfica que se obtiene al agregar aristas si cada arista  $e$  de  $F$  se agrega a  $G$ , con  $F \subseteq A(V_G)$ .

Ahora consideremos la eliminación de vértices en lugar de aristas. Sea  $G$  una gráfica y sea  $A \subseteq V(G)$ , denotamos por  $G - A \subseteq G$  a la subgráfica inducida por  $V(G) \setminus A$ , es decir:

$$G - A = G[V(G) \setminus A].$$

Y, para todo  $v \in V(G)$ ,  $G - v = G[V(G) \setminus \{v\}]$ .

En la figura 1.16 se muestra una gráfica y la gráfica que se obtienen al borrar el vértice  $v_7$ .

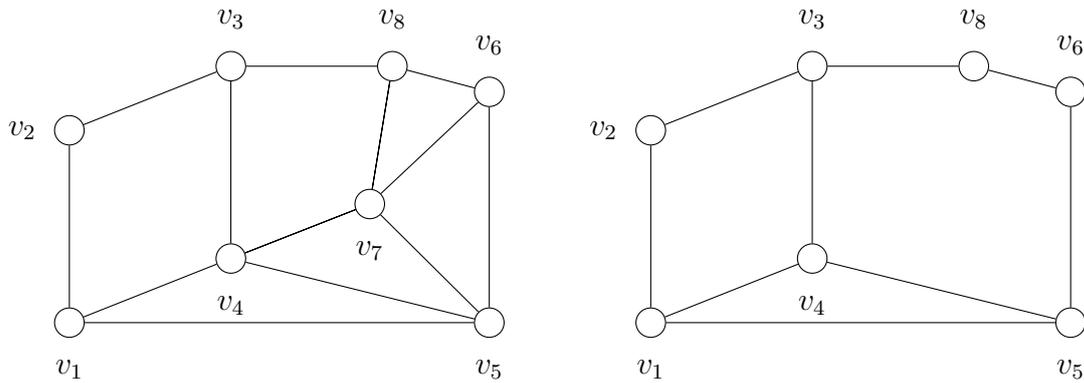


Figura 1.16: Gráfica  $G$  y  $G - v_7$ .

Utilizando la definición de subgráfica inducida definimos que es un conjunto estable. Sea  $X \subseteq V(G)$ , se dice que  $X$  es **estable** si  $G[X]$  es una gráfica discreta.

También se pueden definir las operaciones de unión e intersección de gráficas.

**Definición 1.2.5.** La unión de dos gráficas  $G$  y  $H$ , es la gráfica

$$G \cup H := (V(G) \cup V(H), A(G) \cup A(H)).$$

La unión ajena de dos gráficas se representa como  $G + H$ .

La intersección  $G \cap H$  de  $G$  y  $H$  se define de manera análoga:

$$G \cap H := (V(G) \cap V(H), A(G) \cap A(H)).$$

### 1.2.4. Caminos, trayectorias y ciclos

Algunas definiciones que surgen de forma muy natural en la teoría de las gráficas es la de camino, trayectoria y ciclo.

**Definición 1.2.6.** Sea  $G$  una gráfica, un **camino**  $W$  de  $G$  es una sucesión de vértices  $(u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1})$  tales que  $u_i u_{i+1} \in A(G)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . El número de aristas que contiene el camino es su **longitud**, a la cual denotaremos por  $|W|$ . Si  $W$  es un camino que empieza en  $u$  y termina en  $v$ , decimos que  $W$  es un  $(u, v)$ -camino.

También se pueden utilizar las siguientes notaciones para describir un camino de longitud  $k$ :

$$W : u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u_{k+1}$$

$$W : u_1 \xrightarrow{k} u_{k+1}.$$

**Definición 1.2.7.** Sea  $W = (u_1, u_2, \dots, u_{k+1})$  un camino, entonces diremos que

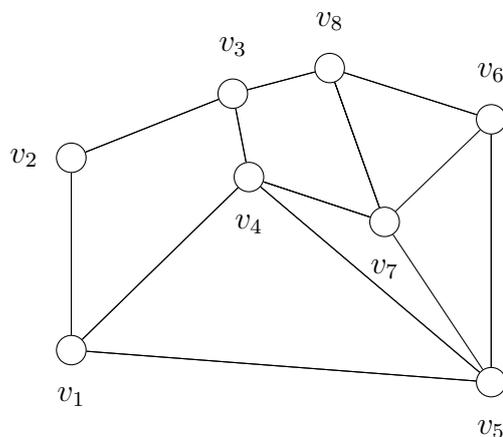
- $W$  es un **camino cerrado** si  $u_1 = u_{k+1}$ .
- $W$  es una **trayectoria** si  $u_i \neq u_j$ , para cualesquiera  $i \neq j$ .
- $W$  es un **ciclo** si  $u_1 = u_{k+1}$  y  $u_i \neq u_j$ , para cualesquiera  $i \neq j$  con  $i, j \notin \{1, k+1\}$ .
- $W$  es una **trayectoria trivial** si su longitud es cero.
- $W^{-1} : u_{k+1} \rightarrow u_k \rightarrow u_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow u_2 \rightarrow u_1$  es el **camino inverso** de  $W$ .
- $W$  es un **paseo** si  $u_i u_{i+1} \neq u_j u_{j+1}$  para toda  $i \neq j$ .

Un vértice  $u$  es un **extremo** de una trayectoria  $P$  si ésta termina o empieza en  $u$ . La **unión** de dos caminos  $W_1 : u \xrightarrow{*} v$  y  $W_2 : v \xrightarrow{*} w$  es el camino  $W_1 W_2 : u \xrightarrow{*} w$  (el extremo  $v$  debe ser común en ambos caminos).

Dos caminos  $W_1$  y  $W_2$  son **ajenos** si no tienen vértices en común; y son **independientes** si sólo tienen en común los extremos.

Considera dos caminos  $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$  y  $Q = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ . Si el final de  $P$  coincide con el inicio de  $Q$  (es decir, si  $v_k = u_1$ ), utilizamos  $PQ$  para denotar el camino resultante de concatenar  $P$  y  $Q$ . Así,  $PQ$  es el camino  $(v_1, v_2, \dots, v_k = u_1, u_2, \dots, u_m)$ .

En la gráfica  $G$  que aparece en la figura 1.17 se puede ver que la sucesión  $(v_1, v_4, v_7, v_5, v_1)$  es un camino cerrado, la sucesión  $(v_2, v_3, v_4, v_7, v_6)$  es una

Figura 1.17: Gráfica  $G$ .

trayectoria,  $(v_4, v_3, v_8, v_7, v_4)$  un ciclo y la sucesión  $(v_3, v_4, v_5, v_7, v_4, v_1)$  un paseo.

A una trayectoria con  $k$  vértices (de longitud  $k - 1$ ) la denotamos por  $P_k$ , y a un ciclo con  $k$  vértices (de longitud  $k$ ) lo denotamos por  $C_k$ . Dependiendo de la paridad de  $k$  diremos que la trayectoria o el ciclo, es par o impar.

De la definición de camino y trayectoria se puede ver que una trayectoria es un camino que no repite vértices. Si tenemos un  $uv$ -camino que repite vértices, siempre podemos encontrar un atajo y hallar una  $uv$ -trayectoria cuyos vértices y aristas son parte de del camino.

**Lema 1.2.1.** Si una gráfica  $G$  contiene un  $(u, v)$ -camino de longitud  $l$ , entonces  $G$  contiene una  $(u, v)$ -trayectoria de longitud a lo más  $l$ .

*Demostración.* Sea  $G$  un gráfica y  $u$  y  $v$  dos vértices de  $G$ . Consideremos dentro de todos los  $(u, v)$ -caminos de  $G$ , uno de menor longitud, digamos

$$P = (u = u_0, u_1, \dots, u_k = v).$$

De manera que  $k \leq l$ .

Afirmamos que  $P$  es una trayectoria. Para probarlo supongamos lo contrario, es decir, existen  $u_i, u_j$  vértices de  $P$  tales que  $u_i = u_j$ , con  $0 \leq i < j \leq k$ . Si eliminamos los vértices  $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_j$ , de  $P$ , obtenemos el  $(u, v)$ -camino:  $P' = (u = u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_i = u_j, u_{j+1}, \dots, u_k = v)$  cuya longitud es menor que  $k$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $P$  es una  $(u, v)$ -trayectoria de longitud a lo más  $l$ .  $\square$

La definición longitud de una trayectoria nos permite tener el concepto de distancia en una gráfica.

**Definición 1.2.8.** Sean  $u, v \in V(G)$ , definimos la **distancia** entre  $u$  y  $v$  en  $G$  como:

$$d_G(u, v) = \begin{cases} \min\{k \mid u \xrightarrow{*} v\} & \text{si existe una } (u, v)\text{-trayectoria en } G, \\ \infty & \text{si no existe alguna } (u, v)\text{-trayectoria en } G. \end{cases}$$

El **diámetro** de una gráfica  $G$ , denotado por  $\text{diam}(G)$ , es la máxima entre los vértices de  $G$ .

Una gráfica  $G$  es **conexa** si para todo par de vértices  $u, v \in V(G)$  hay una trayectoria que los conecta. En términos de la distancia esto implica que  $d_G(u, v) < \infty$  para todo  $u, v \in V(G)$ . En otro caso se dice que la gráfica es **disconexa**. Una subgráfica conexa de  $G$  que no es una subgráfica propia de alguna otra subgráfica conexa de  $G$  es una **componente conexa** de  $G$ . Es decir, las subgráficas conexas maximales de  $G$  son sus componentes conexas.

Denotamos con  $c(G)$ , o  $k(G)$  al número de componentes conexas de  $G$ .

Dada una gráfica  $G$ , podemos definir una relación  $R$  sobre  $V(G)$  de la siguiente manera:

$$uRv \text{ si y solo si existe una } (u, v)\text{-trayectoria en } G.$$

Esta relación nos ayuda a encontrar las componentes conexas de la gráfica (ver ejercicio 7 de este capítulo).

### 1.2.5. Sucesiones de grados

Cuando tenemos una gráfica  $G$  podemos estudiar la sucesión de los grados de los vértices de  $G$ . Por ejemplo, la gráfica que aparece en la figura 1.18 tiene la sucesión de grados  $(2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4)$ .

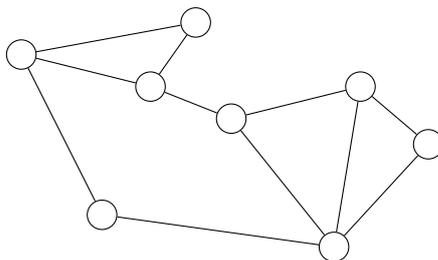


Figura 1.18: Gráfica con sucesión de grados  $(2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4)$ .

Ahora podemos hacernos la pregunta inversa, si yo tengo una sucesión de números, ¿puedo encontrar una gráfica que tenga esa sucesión como sucesión de grados?

**Ejemplo 1.** Determina si existe una gráfica con la siguiente sucesión de grados  $(3, 3, 3, 3, 3)$ .

Por el teorema del apretón de manos (teorema 1.2) sabemos que si sumamos los números de la sucesión, el resultado tiene que ser un número par. Por lo tanto, no existe una gráfica con esta sucesión de grados.

Diremos que una sucesión  $s$  es **graficable** si existe una gráfica que tenga a  $s$  como sucesión de grados.

**Teorema 1.2.2.** Una sucesión decreciente  $s : (d_1, d_2, \dots, d_n)$ , con  $n \geq 2$ , de naturales, donde  $d_1 \geq 1$ , es graficable si y solo si la sucesión:

$$s' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1} - 1, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$$

es graficable.

*Demostración.* Primero probemos la segunda implicación.

Supongamos que  $s'$  es graficable. De manera que existe una gráfica  $G_1$  con conjunto de vértices  $V(G_1) = \{v_2, v_3, \dots, v_n\}$  tal que:

$$d(v_i) = \begin{cases} d_i - 1 & \text{si } 2 \leq i \leq d_1 + 1, \\ d_i & \text{si } d_1 + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Construimos una nueva gráfica  $G$ , a partir de  $G_1$ , agregando un nuevo vértice  $v_1$  y haciéndolo adyacente a todo  $v_i$ , con  $2 \leq i \leq d_1 + 1$ . Como  $d(v_i) = d_i$  para  $1 \leq i \leq n$ , se sigue que  $s$  es una sucesión de grados de  $G$  y por lo tanto  $s$  es graficable.

Ahora supongamos que  $s$  es graficable.

Si existe una gráfica  $H$  con sucesión de grados  $s$  y que contenga un vértice  $u$  de grado  $d_1$  y tal que  $u$  es adyacente a vértices cuyos grados son  $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$ , entonces  $s_1$  es una sucesión de  $H - u$ , teniendo lo deseado.

Probaremos a continuación que si  $s$  es graficable, existe una gráfica con un vértice  $u$  de grado  $d_1$  cuyos vecinos tienen grados  $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$ , respectivamente. Procederemos por contradicción. Supongamos que  $s$  es graficable pero que no existe una gráfica  $H$  como se desea. Dentro de todas las gráficas con sucesión de grados  $s$ , sea  $G$  una gráfica con  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $d(v_i) = d_i$  para  $1 \leq i < n$  y que la suma de los grados de los vecinos de  $v_1$  sea tan grande como sea posible. Como los grados de los vecinos de  $v_1$  son exactamente  $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$ , se sigue que  $v_1$  es adyacente a un vértice  $v_s$  que tenga grado menor a algún vértice  $v_r$  al cual  $v_1$  no es adyacente. Esto es, existen vértices  $v_r$  y  $v_s$  con  $d_r > d_s$  tales que  $v_1$  es adyacente a  $v_s$  pero no a  $v_r$ .

Como  $d(v_r) = d_r > d_s = d(v_s)$ , existe un vértice  $v_t$  adyacente a  $v_r$  pero no a  $v_s$ . Considérese entonces la gráfica  $G'$  obtenida al quitarle a  $G$  las aristas  $v_1v_s$  y  $v_rv_t$  y agregando las aristas  $v_1v_r$  y  $v_sv_t$ . Entonces  $G$  y  $G'$  tienen el mismo conjunto de vértices, la misma sucesión de grados pero la suma de los grados de los vecinos de  $v_1$  en  $G'$  es mayor que en  $G$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

### 1.3. Ejercicios

1. Considera una cuadrícula  $C$  de  $m \times n$  y fichas de dominó de  $2 \times 1$ .
  - Demuestra que  $C$  puede ser cubierta con las fichas de dominó si  $m$  o  $n$  es par.
  - Demuestra que  $C$  no puede ser cubierta con las fichas de dominó si  $m$  y  $n$  son impares
2. Encuentra todas las gráficas no isomorfas que hay de orden  $n = 2, 3, 4, 5$ .
3. Sea  $G$  una gráfica. Demuestra que si  $G$  es  $k$ -regular, entonces  $k$  es par.
4. Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  con  $\delta(G) \geq 2$ . Demuestra que  $|A(G)| \geq 2$ .
5. Sea  $R$  la relación definida sobre  $V(G)$  como  $uRv$  si y solo si existe una  $(u, v)$ -trayectoria en  $G$ . Entonces  $R$  es una relación de equivalencia.
6. Para toda gráfica  $G$  y todo entero  $r \geq \Delta(G)$ , existe una gráfica  $H$   $r$ -regular que contiene a  $G$  como subgráfica inducida.
7. Sea  $G$  una gráfica y sea  $R$  la relación definida sobre  $V(G)$  como  $uRv$  si y sólo si existe una  $(u, v)$ -trayectoria en  $G$ .
  - Demuestra que  $R$  es una relación de equivalencia.
  - Demuestra que las clases de equivalencia son las componentes conexas de  $G$ .
8. Demuestra que para toda gráfica  $G$  y todo entero  $r \geq \Delta(G)$ , existe una gráfica  $H$   $r$ -regular que contiene a  $G$  como subgráfica inducida.
9. Demuestra que la relación *ser isomorfo* es una relación de equivalencia.
10. Demuestra que una gráfica conexa y distinta de la completa tiene una trayectoria de longitud al menos  $\delta(G) + 1$ .
11. Construye una gráfica conexa simple de orden 8, tamaño 17 tal que todo vértice tenga grado dos, tres o cuatro.

12. Determina cuales de las siguientes sucesiones son graficables
- $(7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1)$ ,
  - $(3, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,
  - $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 3)$ ,
  - $(6, 6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2)$ .
13. Sea  $G$  una gráfica de orden 11. Demuestra que si  $\delta(G) \geq 5$ , entonces  $\text{diam}(G) \leq 2$



# Capítulo 2

## Árboles

Los árboles son una familia de gráficas que desde sus comienzos han tenido una gran cantidad de aplicaciones. Uno de los primeros en usar esta familia de gráficas fue el matemático inglés Arthur Cayley, quien los utilizó para enumerar un tipo de estructuras químicas. Gustav Kirchhoff usó a los árboles para el estudio de redes eléctricas, obteniendo así lo que hoy en día se conocen como Las Leyes de Kirchhoff.

### 2.1. El origen de los árboles

En 1857, Arthur Cayley (1821-1895) mientras intentaba resolver un problema de cálculo diferencial se topó con el problema de estudiar un tipo particular de moléculas llamadas hidrocarburos saturados. Éstas moléculas están formadas por átomos de hidrógeno y de carbono. En un hidrocarburo saturado cada átomo de carbono tiene valencia 4 y cada átomo de hidrógeno tiene valencia 1. La fórmula química de estas moléculas es  $C_nH_{2n+2}$ , lo que indica que cada molécula tiene  $n$  átomos de carbono y  $2n + 2$  átomos de hidrógeno, para algún entero positivo  $n$ . En la figura 2.1 se muestran los diagramas de los hidrocarburos saturados cuando  $n = 1, 2, 3$ .

Si pensamos a los átomos como puntos y a los enlaces como aristas, estos diagramas son gráficas, las cuales cumplen dos propiedades: son conexas y no tienen ciclos. A éstas gráficas se les llama árboles.

### 2.2. Árboles

Antes de dar la definición de árbol recordemos que una gráfica es *acíclica* si no contiene ciclos.

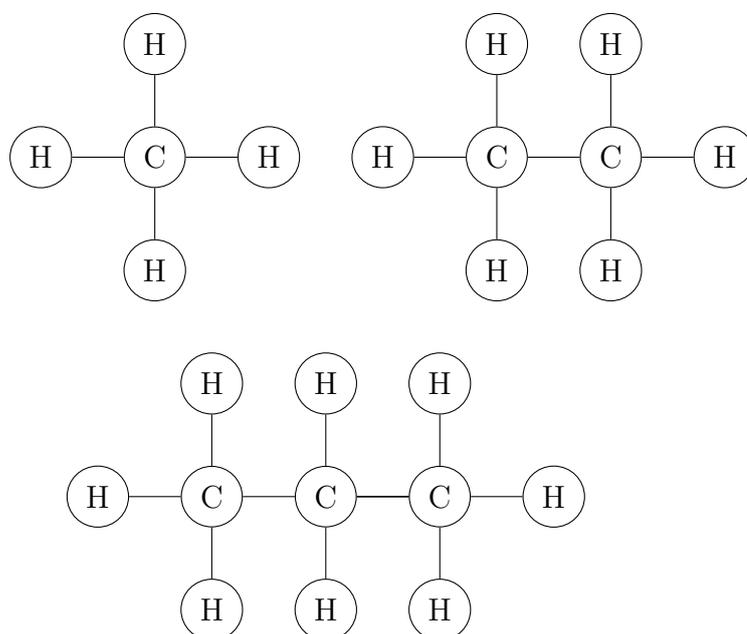


Figura 2.1: Moléculas de hidrocarburos saturados.

**Definición 2.2.1.** Un *árbol* es una gráfica conexa y acíclica.

En la figura 2.2 se muestran todos los árboles de 4 vértices.

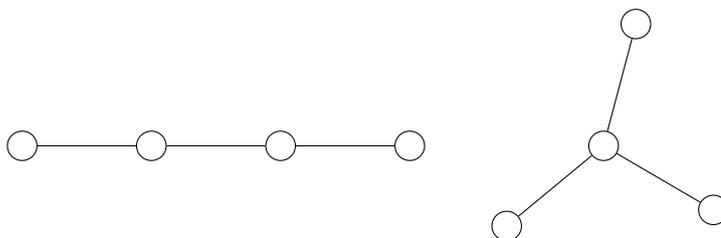


Figura 2.2: Los dos árboles de orden 4.

Si eliminamos la condición de ser conexa lo que tenemos es un bosque, es decir, un *bosque* es una gráfica acíclica y no conexa. Observa que las componentes conexas de un bosque son árboles.

Un *punte* de una gráfica  $G$  es una arista  $e = uv$  de  $G$  tal que  $c(G - e) > c(G)$ , donde  $c(G)$  denota el número de componentes conexas de  $G$ . Observa que una arista  $e = uv$  es un puente de  $G$  si y solo si  $u$  y  $v$  están en diferentes componentes conexas de  $G - e$ . Por lo tanto si  $G$  es una gráfica y  $e$  un puente de  $G$ , entonces  $c(G - e) = c(G) + 1$ .

Los puentes también tienen la siguiente caracterización.

**Teorema 2.2.1.** Una arista  $e$  de  $G$  es un puente si y solo si  $e$  no pertenece a algún ciclo de  $G$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica y  $e = uv$  una arista de  $G$ . Si hay un ciclo  $C$  en  $G$  que contiene a  $e$ , entonces podemos ver a  $C$  como la unión de dos trayectorias y la arista  $e$ , digamos  $C = PeQ$ , entonces  $QP$  es una  $(v, u)$ -trayectoria en  $G - e$ , por lo tanto  $G - e$  no es un puente.

Para la segunda implicación lo probaremos por contrapositiva, es decir, si  $e = uv$  no es un puente, entonces  $u$  y  $v$  están en la misma componente conexa de  $G - e$ , digamos  $G_1$ , en la cual hay una  $(v, u)$ -trayectoria, digamos  $P$ . De manera que  $Pe$  es un ciclo en  $G$  que contiene a  $e$ .  $\square$

En los árboles, al no haber ciclos, al eliminar cualquier arista del árbol este se desconecta. Esta propiedad caracteriza a esta familia de gráficas.

**Teorema 2.2.2.** Una gráfica conexa es un árbol si y sólo si todas sus aristas son puentes.

El siguiente lema será de utilidad para probar algunas propiedades de los árboles.

**Lema 2.2.1.** Sea  $e$  un puente en una gráfica conexa  $G$ .

1. Entonces  $c(G - e) = 2$ .
2. Sea  $H$  una componente conexa de  $G - e$ . Si  $f \in H$  es un puente de  $H$ , entonces  $f$  es un puente de  $G$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica y  $e = uv$  una arista de  $G$ .

1. Como  $e$  es un puente,  $u$  y  $v$  no están conectados en  $G - e$ . Sea  $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$ . Como  $G$  es conexa, existe una  $(w, v)$ -trayectoria  $P$  en  $G$ . ésta es una trayectoria en  $G - e$  a menos que  $P = w \xrightarrow{*} u \rightarrow v$ , en cuyo caso  $P' = Pu$  (la trayectoria que resulta de quitarle a  $P$  la arista  $e$  y el vértice  $v$ ) es una  $(w, u)$ -trayectoria en  $G - e$ . De manera que en  $G - e$  todo vértice está conectado a  $u$  o a  $v$ . Por lo tanto  $c(G - e) = 2$ .
2. Demostraremos la contrapositiva. Supongamos que  $f \in H$  no es un puente de  $G$ . Entonces  $f$  pertenece a un ciclo  $C$  de  $G$ , el cual no puede contener a  $e$  puesto que  $e$  es puente. Así,  $C$  está contenido en  $H$ , por lo tanto  $f$  no es puente de  $H$ .

$\square$

Como una aplicación de este teorema tenemos el siguiente resultado.

Decimos que una trayectoria  $P : u \xrightarrow{*} v$  es **maximal** en una gráfica  $G$  si y solo si no existe arista  $e \in A(G)$  tal que  $Pe$  o  $eP$  es una trayectoria.

**Lema 2.2.2.** Sea  $P : u \xrightarrow{*} v$  una trayectoria maximal en una gráfica  $G$ . Entonces,  $N(v) \subseteq P$ . Más aún, si  $G$  es acíclica entonces  $d_G(v) = 1 = d_G(u)$ .

*Demostración.* Si  $e = vw$  es una arista de  $G$ , con  $w \notin P$ , entonces  $Pe$  es una trayectoria, lo cual contradice la maximalidad de  $P$ . En consecuencia  $N_G(v) \subseteq P$ . En el caso de gráficas acíclicas, si  $wv \in A(G)$ , entonces  $w \in P$  y  $wv$  es necesariamente la última arista de  $P$  con el fin de evitar los ciclos.  $\square$

Otra peculiaridad de los árboles tiene que ver con los vértices de grado uno. Esta propiedad se demuestra de forma inmediata al utilizar el teorema 2.2.3.

**Corolario 2.2.1.** Todo árbol  $T$  con  $n \geq 2$  tiene al menos dos hojas.

*Demostración.* Supongamos que  $G$  es un árbol de orden  $n \geq 2$ . Observa que  $d(v) \geq 1$ , para todo  $v \in V(G)$ . Por el teorema del apretón de manos y el inciso (iii) del teorema 2.2.3 tenemos que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|A(G)| = 2(n-1). \quad (2.1)$$

Por otro lado, si  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y supongamos que  $G$  tiene a lo más un vértice de grado 1, entonces

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n) \geq 1 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{(n-1)\text{-veces}} = 1 + 2(n-1). \quad (2.2)$$

Combinando las ecuaciones (2.1) y (2.2) obtenemos que  $2(n-1) \geq 1 + 2(n-1)$ , que es una contradicción.  $\square$

**Teorema 2.2.3.** Sea  $T$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $T$  es un árbol.
- (ii) Cualesquiera dos vértices están conectados en  $T$  por una única trayectoria.
- (iii)  $T$  es acíclica y  $m = n - 1$ .

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Como  $T$  es conexa, cualesquiera dos vértices están conectados por una trayectoria. Si existen dos vértices de  $G$  que están conectados por dos trayectorias distintas, entonces se forma un ciclo con todos o algunos de los vértices de estas dos trayectorias, lo cual es imposible.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Haremos la prueba por inducción sobre  $n$ . Claramente la afirmación se cumple para  $n = 2$ . Supongamos que se cumple para toda gráfica de orden  $n - 1$ , con  $n > 2$ , que satisface (ii). Sea  $T$  una gráfica de orden  $n$  que satisface (ii). En particular  $T$  es conexa y acíclica. Sea  $P : u \xrightarrow{*} v$  una trayectoria maximal en  $T$ . De acuerdo con el lema 2.2.2 se tiene que  $d_T(v) = 1 = d_T(u)$ . Sea  $w \in V(T)$  tal que  $P : u \xrightarrow{*} w \rightarrow v$ . Así, la subgráfica  $T - v$ , de tamaño  $m_{T-v}$  y orden  $n - 1$  es conexa y satisface la condición (ii). Así, de acuerdo con la hipótesis de inducción,  $m_{T-v} = (n - 1) - 1 = n - 2$  y por lo tanto:  $m = m_{T-v} + 1 = n - 1$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Sea  $T$  una gráfica acíclica y tal que  $m = n - 1$ . Para ver que  $T$  es árbol sólo hace falta probar que  $T$  es conexa. Sean  $T_i = (V_i, A_i)$ , con  $1 \leq i \leq k$ , las  $k$  componentes conexas de  $T$  con orden y tamaño  $n_i$  y  $m_i$ , respectivamente. Como  $T$  es un bosque, cada  $T_i$  es un árbol, de manera que para cada  $1 \leq i \leq k$  se tiene que  $m_i = n_i - 1$ . Así,

$$n - 1 = m = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k n_i - 1 = n - k.$$

Por lo tanto  $k = 1$ , es decir,  $T$  es conexa. □

**Definición 2.2.2.** Sea  $G$  una gráfica conexa.  $T \subseteq G$  es un **árbol generador de  $G$**  si  $T$  es un árbol y  $V(T) = V(G)$ .

Una gráfica conexa puede tener varios árboles generadores, en la figura 2.3 se muestra una gráfica y uno de sus árboles generadores. Se puede probar que toda gráfica conexa contiene un árbol generador como subgráfica.

**Teorema 2.2.4.** Toda gráfica conexa tiene un árbol generador.

*Demostración.* Dentro de todas las subgráficas de  $G$  que son árboles sea  $T \subseteq G$  un árbol de mayor orden posible. Supongamos que  $V(T) \neq V(G)$  y sean  $u \in V(G) \setminus V(T)$  y  $v$  un vértice de  $T$ . Como  $G$  es conexa, existe una  $(v, u)$ -trayectoria en  $G$ ,  $P : v = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_k = u$ . Sea  $v_j$  con  $2 \leq j \leq k$  el primer vértice de la trayectoria que no pertenece a  $V(T)$ . De manera que  $v_{j-1}v_j \in A(G) \setminus A(T)$  y  $v_j \notin V(T)$ . Por lo tanto, la gráfica  $T + v_{j-1}v_j$  es un árbol de orden  $k + 1$ , en contradicción con la maximalidad de  $T$ . Por lo tanto  $V(T) = V(G)$ , es decir,  $T$  es un árbol generador de  $G$ . □

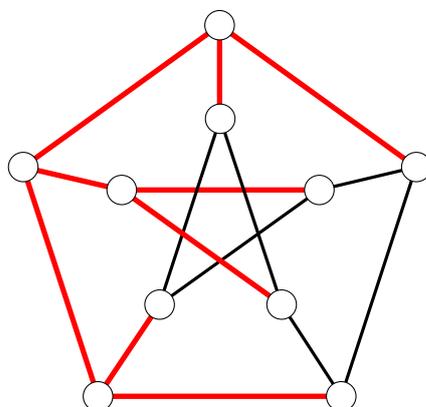


Figura 2.3: La gráfica de Petersen, en rojo un árbol generador.

Como toda gráfica tiene un árbol generador, podemos probar los siguientes corolarios

**Corolario 2.2.2.** El tamaño de toda gráfica conexa de orden  $n$  es al menos  $n - 1$ .

**Corolario 2.2.3.** Una gráfica conexa  $G$  de orden  $n$  y tamaño  $m$  es un árbol si y solo si  $m = n - 1$ .

*Demostración.* La primera implicación ya la probamos en el teorema 2.2.3. Veamos que si una gráfica conexa de orden  $n$  y tamaño  $m = n - 1$ , entonces es un árbol. Sea  $T \subseteq G$  un árbol generador de  $G$ , de manera que  $|A(T)| = n - 1 = m$ , por lo tanto  $T = G$ .  $\square$

**Corolario 2.2.4.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$ . Si  $G$  satisface cualesquiera dos de las siguientes propiedades:

- (i)  $G$  es conexa,
- (ii)  $G$  es acíclica,
- (iii)  $m = n - 1$ ,

entonces  $G$  es un árbol.

### 2.3. Árboles generadores de peso mínimo

Una gráfica  $G$  es **ponderada** si a cada arista  $e$  de  $G$  se le asocia un número  $w(e)$  conocido como el **peso de la arista** (ver figura 2.4). Si  $H$  es

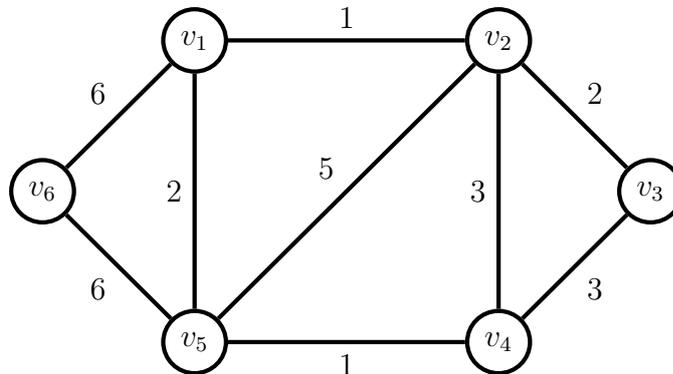


Figura 2.4: Gráfica con pesos en las aristas.

una subgráfica de  $G$ , el **peso de  $H$** , al cual denotamos por  $w(H)$  es la suma de los pesos de las aristas en  $H$ . Muchos problemas de optimización requieren encontrar una subgráfica de peso mínimo (o máximo). A un árbol generador de peso mínimo se le llama **árbol óptimo**. Una solución al problema del mínimo conector que considera pesos en las aristas la da el Algoritmo de Kruskal, el cual fue implementado por Kruskal [Falta Referencia](#) en 1956 para resolver el problema del mínimo conector. A continuación explicamos como funciona este algoritmo.

### Algoritmo de Kruskal

1. Selecciona una arista  $e_1$  de la gráfica  $G$  de manera que el peso  $w(e_1)$  sea el más pequeño posible.
2. Si las aristas  $e_1, e_2, \dots, e_i$  ya fueron seleccionadas, escoge una arista  $e_{i+1}$  de  $A(G) \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  de tal forma que
  - a) La subgráfica inducida  $G[\{e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}\}]$  es acíclica;
  - b)  $w(e_{i+1})$  es lo más chico posible (sujeto a la condición a).
3. El algoritmo termina cuando ya no se puedan agregar aristas.

Por ejemplo, vamos a utilizar el algoritmo de Kruskal para encontrar un árbol generador en la gráfica ponderada que aparece en la figura 2.4.

Primero, seleccionamos una arista con el menor peso. En la gráfica hay dos aristas con peso 1: la arista  $v_1v_2$  y la arista  $v_4v_5$ . Podemos seleccionar cualquiera de las dos, así que elegimos, por ejemplo, la arista  $v_1v_2$ .

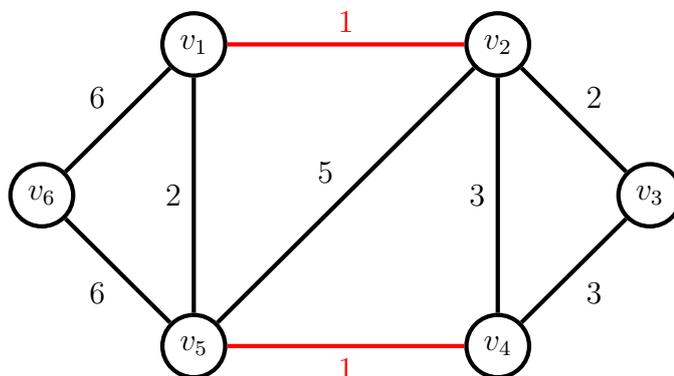


Figura 2.5: Primer y segundo paso del algoritmo de Kruskal.

Siguiendo el algoritmo, entre las aristas no seleccionadas, tomamos la de menor peso que no forme un ciclo. En este caso, la única arista que cumple estas dos condiciones es  $v_4v_5$  (ver figura 2.5).

En el tercer paso, debemos elegir entre las aristas  $v_1v_5$  y  $v_2v_3$ , ambas con peso 2. Elegimos la arista  $v_1v_5$ . De acuerdo con el algoritmo, en el siguiente paso seleccionamos la arista  $v_2v_3$ .

Finalmente, no podemos elegir las aristas  $v_2v_4$  o  $v_3v_4$ , de peso 3, ni la arista  $v_2v_5$ , de peso 5, ya que formarían un ciclo. Por lo tanto, debemos elegir una de las aristas  $v_1v_6$  o  $v_5v_6$ . Seleccionamos la arista  $v_1v_6$ .

En este paso, el algoritmo se detiene. El árbol generador mínimo obtenido está compuesto por las aristas  $v_1v_2$ ,  $v_1v_5$ ,  $v_2v_3$ ,  $v_4v_5$ , y  $v_1v_6$ , con un peso total de 12 (ver figura 2.6).

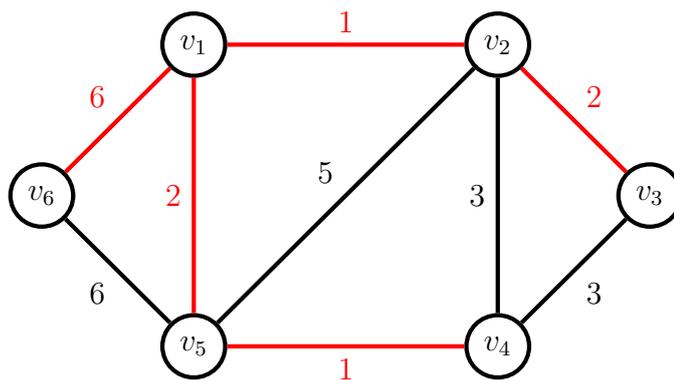


Figura 2.6: Las aristas rojas son el árbol óptimo obtenido con el algoritmo de Kruskal.

Una variación del Algoritmo de Kruskal es el Algoritmo de Prim, el cual

también nos permite encontrar un árbol generador de peso mínimo en una gráfica conexa.

### Algoritmo de Prim

1. Seleccionamos un vértice  $v_0$  cualquiera de la gráfica.
2. De entre todas las aristas incidentes con  $v_0$  seleccionamos aquella que tenga el menor peso y seleccionamos el otro vértice en el que incide dicha arista.
3. Repetimos el paso 2, siempre que la arista seleccionada sea incidente con uno de los vértices seleccionados y no forme un ciclo.
4. El algoritmo termina cuando todos los vértices de la gráfica estén seleccionados.

Vamos a aplicar el algoritmo de Prim a la gráfica de la figura 4.4. Primero, seleccionamos un vértice de la gráfica, digamos  $v_6$ . A continuación, elegimos la arista incidente a  $v_6$  de menor peso. Como las dos aristas incidentes a  $v_6$  tienen un peso de 6, seleccionamos cualquiera de ellas; en este caso, la arista  $v_5v_6$ , y agregamos el vértice  $v_5$  al árbol. Repetimos el paso anterior: seleccionamos una arista que sea incidente a uno de los vértices  $v_5$  o  $v_6$ , que tenga el peso mínimo y que no forme un ciclo. La única arista que cumple estas condiciones es  $v_4v_5$ , por lo que agregamos el vértice  $v_4$  al árbol. En el siguiente paso, agregamos la arista  $v_1v_5$  y el vértice  $v_1$ . Finalmente, añadimos la arista  $v_2v_3$ . Aquí concluye el algoritmo. En la figura 2.7 se muestra en rojo el árbol generador de peso mínimo obtenido con el algoritmo de Prim.

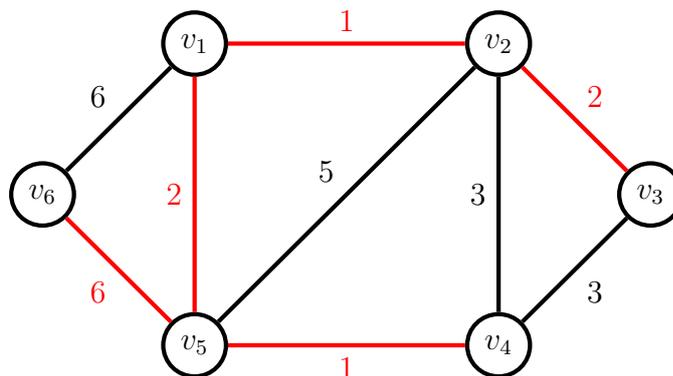


Figura 2.7: Árbol generador de peso mínimo obtenido con el algoritmo de Prim.

Es importante observar que una gráfica puede tener distintos árboles generadores de peso mínimo.

## 2.4. Ejercicios

1. Demuestra que todo bosque de orden  $n$  con  $k$  componentes conexas tiene  $n - k$  aristas.
2. Dibuja todos los árboles no isomorfos de orden cinco (hay seis).
3. Dibuja todos los árboles no isomorfos de orden seis (hay 11?).
4. Sea  $T$  un árbol con un número par de aristas. Demuestra que  $T$  tiene al menos un vértice de grado par.
5. Encuentra el número de árboles generadores que tiene  $K_4$ .
6. Demuestra que un árbol con exactamente dos hojas es una trayectoria.
7. Demuestra que todo árbol es una gráfica bipartita.
8. Sea  $T$  un árbol con  $n$  vértices. Demuestra que la suma de los grados de todos los vértices de  $T$  es igual a  $2(n - 1)$ .
9. Encuentra el número de árboles generadores que tiene  $K_5$ .
10. Demuestra que si un árbol tiene un número impar de vértices, entonces tiene un número par de aristas.
11. Demuestra que si  $G$  es una gráfica con grado mínimo al menos dos, entonces  $G$  contiene un ciclo.
12. Prueba que en todo árbol, la eliminación de una arista desconecta la gráfica.
13. Sea  $G$  un árbol de orden  $n$ . Demuestra que si  $G$  tiene  $k$  hojas, entonces  $k \geq (n + 2)/2$ .
14. Sea  $T$  un árbol con  $n$  vértices. Prueba que si todos los vértices de  $T$  tienen grado 1 o 3, entonces  $T$  tiene un número par de vértices.

# Capítulo 3

## Conexidad

Muchos problemas que surgen en la Teoría de las Gráficas están relacionados con las comunicaciones entre los vértices, esto da lugar a la definición de gráfica conexa. En este capítulo, exploraremos en detalle el concepto de conexidad de una gráfica, sus diferentes formas y variantes, y cómo se relaciona con otros parámetros como el grado, el número de trayectorias disjuntas. También veremos técnicas y herramientas utilizadas para determinar la conexidad de una gráfica así como sus propiedades básicas de este parámetro.

### 3.1. Vértices de corte

Recordemos, una gráfica  $G$  es conexa si entre todo par de vértices de  $G$  hay una trayectoria que los conecta. Una **componente conexa** de  $G$  es una subgráfica conexa maximal de  $G$ , es decir, una subgráfica conexa que no está contenida en otra subgráfica conexa más grande. Vamos a denotar con  $c(G)$  al número de componentes conexas de  $G$ . Observa que si  $G$  es conexa, entonces  $c(G) = 1$ .

**Definición 3.1.1.** Sea  $G$  una gráfica y  $v$  un vértice de ésta,  $v$  es un **vértice de corte de  $G$**  si  $c(G - v) > c(G)$ .

En la figura 3.1 se muestra la gráfica pez. Observa que  $v_1$  es el único vértice de corte de la gráfica.

**Teorema 3.1.1.** Sea  $v$  un vértice incidente con un puente en una gráfica conexa  $G$ . Entonces,  $v$  es un vértice de corte de  $G$  si y sólo si  $d(v) \geq 2$ .

*Demostración.* Primero, nota que si una arista  $uv$  es un puente de  $G$ , entonces  $d(v) \geq 1$ .

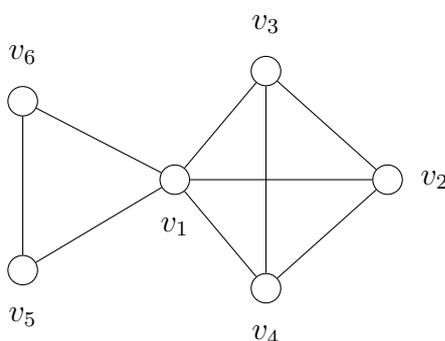


Figura 3.1: Gráfica pez.

- ⇒) Vamos a utilizar la contrapositiva para probar la ida, es decir, probaremos que si  $d(v) < 2$ , entonces  $v$  no es un vértice de corte. Si  $d(v) < 2$ , entonces  $d(v) = 1$ , es decir,  $v$  es una hoja, y en consecuencia la gráfica  $G - v$  es conexa. Por lo tanto  $v$  no es un vértice de corte de  $G$ .
- ⇐) Supongamos que  $d(v) \geq 2$ . Así, existe  $w \in V(G)$  diferente de  $u$  tal que  $uw \in A(G)$ . Asumamos que por el contrario  $v$  no es un vértice de corte de  $G$ . Entonces  $G - v$  es conexa y existe una  $(u, v)$ -trayectoria  $P$  en  $G - v$ . Así,  $P$  junto con  $v$  y las aristas  $uv$  y  $vw$  forman un ciclo que contiene al puente  $uv$ , lo cual es imposible.

□

Una consecuencia de este teorema es que todo vértice de un árbol no trivial o es una hoja o es un vértice de corte. Además se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.1.** Sea  $G$  una gráfica conexa  $G$  con al menos 3 vértices. Si  $G$  contiene un puente, entonces  $G$  contiene un vértice de corte.

Si  $v$  es un vértice de corte de una gráfica conexa  $G$ , entonces  $G - v$  contiene al menos dos componentes conexas. Si  $u$  y  $w$  son vértices en distintas componentes de  $G - v$ , entonces  $u$  y  $w$  no están conectados en  $G - v$ . Por otro lado,  $u$  y  $w$  están necesariamente conectados en  $G$ . Lo cual nos lleva al siguiente teorema.

**Teorema 3.1.2.** Sea  $v$  un vértice de corte en una gráfica conexa  $G$ , y sean  $u$  y  $w$  vertices en distintas componentes de  $G - v$ . Entonces  $v$  pertenece a toda  $(u, w)$ -trayectoria en  $G$ .

Podemos ahora presentar una caracterización de los vértices de corte en una gráfica conexa  $G$ .

**Corolario 3.1.2.** Sea  $G$  una gráfica conexa. Un vértice  $v$  de  $G$  es de corte si y sólo si existen vértices  $u$  y  $w$  distintos a  $v$  tales que  $v$  pertenece a toda  $(u, w)$ -trayectoria en  $G$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $v$  es un vértice de corte de  $G$ . Entonces  $G - v$  no es conexa. Sean  $u$  y  $w$  vértices en distintas componentes conexas de  $G - v$ . Se sigue del teorema anterior que toda  $(u, w)$ -trayectoria en  $G$  contiene a  $v$ .

$\Leftarrow$ ) Si  $G$  contiene dos vértices  $u$  y  $w$  tales que toda  $(u, w)$ -trayectoria en  $G$  contiene a  $v$ , entonces no existe una  $(u, w)$ -trayectoria en  $G - v$ . Por lo tanto  $u$  y  $w$  no estén conectados en  $G - v$  y por lo tanto  $G - v$  es disconexa. En consecuencia  $v$  es un vértice de corte de  $G$ . □

De acuerdo con este corolario, si  $v$  es un vértice en una gráfica conexa  $G$  y no es un vértice de corte, entonces para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $w$  de  $G$ , distintos de  $v$ , existe una  $(u, w)$ -trayectoria que no contiene a  $v$ .

**Teorema 3.1.3.** Sea  $G$  una gráfica conexa y no trivial y sea  $u \in V(G)$ . Si  $v$  es un vértice que esté lo más lejos posible de  $u$  en  $G$ , entonces  $v$  no es un vértice de corte de  $G$ .

*Demostración.* Supongamos lo contrario, que  $v$  es un vértice de corte de  $G$ . Sea  $w$  un vértice que pertenece a una componente conexa de  $G - v$  que no contenga a  $u$ . Como toda  $(u, w)$ -trayectoria contiene a  $v$ , se sigue que  $d(u, w) > d(u, v)$ , lo cual es una contradicción. □

Con esto es inmediato que toda gráfica conexa y no trivial contiene al menos dos vértices que no son de corte.

**Corolario 3.1.3.** Toda gráfica conexa no trivial contiene al menos dos vértices que no son vértices de corte.

*Demostración.* Sean  $u$  y  $v$  dos vértices en una gráfica conexa y no trivial tal que  $d(u, v) = \text{diam}(G)$ . Como tanto  $u$  como  $v$  son los vértices más lejanos, a  $v$  y  $u$ , respectivamente, entonces de acuerdo con el teorema anterior, ni  $u$  ni  $v$  son vértices de corte de  $G$ . □

### 3.1.1. Bloques

Muchas veces la idea de dividir o descomponer una gráfica en subgráficas más pequeñas puede ser de ayuda a la idea de estudiar un parámetro. En este contexto surge la definición de bloque, la cual será una buena herramienta en el estudio de la conexidad.

**Definición 3.1.2.** Una gráfica conexa y no trivial es una gráfica *no separable* si no tiene vértices de corte.

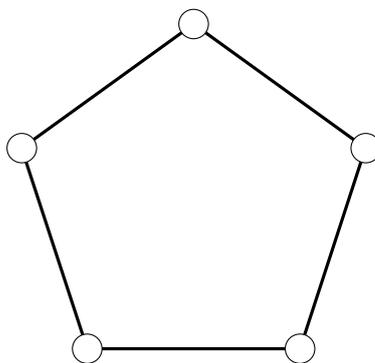


Figura 3.2: El ciclo  $C_5$  es una gráfica no separable.

Los ciclos son ejemplos de gráficas no separables, y estos nos ayudan a caracterizar a esta familia de gráficas.

**Teorema 3.1.4.** Una gráfica de orden  $n \geq 3$  es no separable si y sólo si cualesquiera dos vértices pertenecen a un mismo ciclo.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Demostraremos la ida por contradicción. Sea  $G$  una gráfica no separable de orden  $n \geq 3$ . Como  $G$  no contiene vértices de corte, se sigue del corolario 3.1.1 que  $G$  no contiene puentes. Supongamos que existen parejas de vértices que no pertenecen a un mismo ciclo. Dentro de todas esas parejas sean  $u$  y  $v$  una pareja para la cual  $d(u, v)$  es mínima. Si  $d(u, v) = 1$ , entonces  $uv$  es un puente de  $G$  (pues no pertenece a ningún ciclo) y de acuerdo con el corolario 3.1.1,  $G$  contiene un vértice de corte, lo cual no es posible ya que por hipótesis la gráfica es no separable. Entonces  $d(u, v) = k > 1$ .

Sea  $P = (u = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = v)$  una  $(u, v)$ -trayectoria de longitud  $k$  en  $G$ . Como  $d(u, v_{k-1}) = k - 1 < k$ , existe un ciclo  $C$  que contiene a  $u$  y  $v_{k-1}$ . De acuerdo con la hipótesis,  $v$  no pertenece a  $C$ . Como  $v_{k-1}$  no es un vértice de corte de  $G$  y  $u$  y  $v$  son diferentes a  $v_{k-1}$ , existe una  $(v, u)$ -trayectoria  $Q$  que no contiene a  $v_{k-1}$ . Como  $u$  está en  $C$ , hay un

primer vértice  $x$  de  $Q$  que está en  $C$ . Sea  $Q'$  la  $(v, x)$ -subtrayectoria de  $Q$  y sea  $P'$  una  $(v_{k-1}, x)$ -trayectoria en  $C$  que contenga a  $u$  (si  $x \neq u$ , entonces la trayectoria  $P'$  es única). En cualquier caso, el ciclo  $C'$  que se forma al empezar por  $v$  a su vecino  $v_{k-1}$  por  $P'$  hasta  $x$  y luego por  $Q'$  hasta  $v$  contiene tanto a  $u$  como a  $v$ , lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$ ) Sea  $G$  una gráfica  $n \geq 3$  tal que cualesquiera dos vértices pertenecen a un mismo ciclo. Supongamos por contradicción que  $G$  no es no separable, es decir, supongamos que  $G$  contiene un vértice de corte, digamos  $v$ . Además, es claro que  $G$  debe ser conexa. Sean  $u, w$  dos vértices de  $G$  que pertenecen a dos componentes distintas de  $G - v$ . De acuerdo con la hipótesis,  $u$  y  $w$  pertenecen a un mismo ciclo  $C$  en  $G$ .  $C$  determina dos trayectorias entre  $u$  y  $w$  en  $G$  y al menos una de las cuales no contiene a  $v$ , lo cual contradice el teorema 3.1.2. Por lo tanto  $G$  no contiene vértices de corte, es decir,  $G$  es no separable.  $\square$

**Definición 3.1.3.** Un **bloque** de una gráfica es una subgráfica de ésta, no separable y maximal por contención respecto a la propiedad de ser no separable.

Es decir, un bloque de  $G$  es una subgráfica no separable de  $G$  que no es una subgráfica propia de cualquier otra subgráfica no separable. Todo bloque es una subgráfica inducida de  $G$ . Por lo tanto, si  $G$  misma es no separable, entonces  $G$  tiene únicamente un bloque. Por otro lado, si  $G$  es conexa y tiene vértices de corte, entonces  $G$  tiene uno o más bloques.

Por ejemplo, en la gráfica que aparece en la figura 3.3 se puede ver esta tiene tres bloques que son  $B_1 = \{v_5, v_6, v_7\}$ ,  $B_2 = \{v_1, v_7\}$  y  $B_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ .

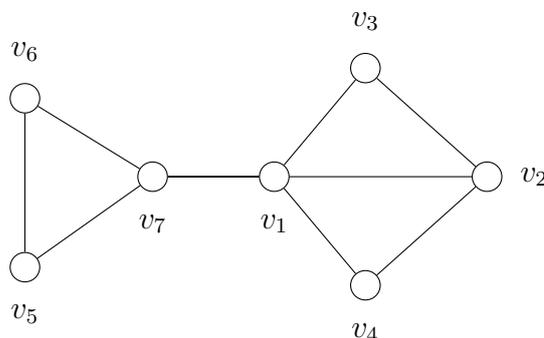


Figura 3.3: Gráfica con tres bloques.

Hay otra manera de ver los bloques. Primero describimos una relación de equivalencia definida en el conjunto de aristas de una gráfica conexa y no trivial.

**Teorema 3.1.5.** Sea  $G$  una gráfica conexa y no trivial y  $R$  la relación definida sobre  $A(G)$  como:

$$eRf \Leftrightarrow e = f \text{ ó } e \text{ y } f \text{ pertenecen a un mismo ciclo de } G.$$

$R$  es una relación de equivalencia.

*Demostración.* Es inmediato que  $R$  es tanto reflexiva como simétrica, así que sólo necesitamos probar que  $R$  es transitiva.

Sean  $e, f, g \in A(G)$  tales que  $eRf$  y  $fRg$ . Si  $e = f$  o  $f = g$ , entonces se sigue que  $eRg$ . Por lo tanto asumamos que  $e$  y  $f$  pertenecen a un mismo ciclo  $C$  y que  $f$  y  $g$  pertenecen a un mismo ciclo  $c'$ . Si  $e$  pertenece a  $C'$  o  $g$  pertenece a  $C$ , entonces  $eRg$ . Supongamos pues que esto no ocurre.

Sea  $e = uv$  y sea  $P$  la  $(u, v)$ -trayectoria en  $C$  que no contiene a  $e$ . Sea  $x$  el primer vértice de  $P$  que pertenece a  $C'$  e  $y$  el último vértice de  $P$  que pertenece a  $C'$ . Además, sea  $P'$  la  $(x, y)$ -trayectoria en  $C'$  que contiene a  $g$  y sea  $P''$  la  $(x, y)$ -trayectoria en  $C$  que contiene a  $e$ . Entonces  $P'$  y  $P''$  producen un ciclo  $C''$  que contiene tanto a  $e$  como a  $g$ . Por lo tanto  $eRg$ .  $\square$

La relación de equivalencia que acabamos de definir induce una partición del conjunto de aristas de toda gráfica conexa y no trivial en clases de equivalencia. ¿Puedes decir cuáles son las clases de equivalencia? El siguiente teorema nos da la respuesta.

**Teorema 3.1.6.** Cada subgráfica de  $G$  inducida por las aristas de una clase de equivalencia de la relación descrita en el teorema 3.1.5 es un bloque de  $G$ .

*Demostración.* TAREA  $\square$

**Corolario 3.1.4.** Cualesquiera dos bloques distintos  $B_1$  y  $B_2$  en una gráfica conexa y no trivial  $G$  tienen las siguientes propiedades:

- (a) Los bloques  $B_1$  y  $B_2$  son disjuntos en aristas.
- (b) Los bloques  $B_1$  y  $B_2$  tienen a lo más un vértice en común.
- (c) Si  $B_1$  y  $B_2$  tienen un vértice en común, entonces éste es un vértice de corte de  $G$ .

*Demostración.* (a) Se sigue de manera directa del teorema 3.1.5.

- (b) Supongamos lo contrario. Sean  $u$  y  $v$  dos vértices comunes de dos bloques  $B_1$  y  $B_2$  de una gráfica conexa  $G$ . Como  $B_1$  y  $B_2$  son conexas, existen  $(u, v)$ -trayectorias  $P_1$  y  $P_2$  en  $B_1$  y  $B_2$ , respectivamente. Además, como  $B_1$  y  $B_2$  son aristas disjuntos, también lo son  $P_1$  y  $P_2$ . Sea  $x$  el primer vértice (luego de  $u$ ) de intersección entre estas trayectorias (posiblemente  $x = v$ ). Así,  $uP_1xP_2^{-1}u$  es un ciclo que contiene una arista  $e_1 \in B_1$  y una arista  $e_2 \in B_2$ . De manera que  $e_1$  y  $e_2$  pertenecen a un mismo bloque, lo cual es imposible.
- (c) Supongamos que dos bloques  $B_1$  y  $B_2$  de  $G$  tienen en común un vértice  $v$ . Entonces en  $v$  inciden una arista  $e_1 = vv_1$  de  $B_1$  y una arista  $e_2 = vv_2$  de  $B_2$ . Si  $v$  no es un vértice de corte, de acuerdo con el corolario 3.1.2, en  $G$  existe una  $(v_1, v_2)$ -trayectoria que no contiene a  $v$ , digamos  $P$ . Así,  $v_1Pv_2e_2ve_1v_1$  es un ciclo que contiene a  $e_1$  y  $e_2$ , lo cual es imposible puesto que  $e_1$  y  $e_2$  pertenecen a distintos bloques.  $\square$

## 3.2. Conexidad de una gráfica

La conexidad un parametro fundamental y muy estudiado en la teoría de las gráficas, que describe la capacidad de una gráfica para mantenerse como una sola pieza (conexa) después de la eliminación de uno o más vértices o aristas. Este valor es esencial para entender la estructura y la funcionalidad de una gráfica. Comenzamos dando la definición de este parámetro.

**Definición 3.2.1.** Un subconjunto  $S \subseteq V(G)$  es un **conjunto de corte** si  $G - S$  es desconexa. También se dice que  $S$  **separa** los vértices  $u$  y  $v$  y que es un  **$(u, v)$ -conjunto de corte**, si  $u$  y  $v$  pertenecen a diferentes componentes conexas de  $G - S$ . A un conjunto de corte de cardinalidad mínima en  $G$  se le llama **conjunto de corte mínimo**.

Observa que una gráfica conexa contiene un conjunto de corte si y sólo si no es completa. Sea  $G$  una gráfica conexa distinta de la gráfica completa. Si  $U \subseteq V(G)$  es un conjunto de corte mínimo en  $G$ , entonces  $G - U$  es desconexa y contiene al menos dos componentes conexas. Si  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , con  $k \geq 2$ , son las componentes conexas de  $G$ , entonces todo vértice  $u \in U$  es adyacente a al menos un vértice en  $G_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . En caso contrario, el conjunto  $U \setminus \{u\}$  sería un conjunto de corte más pequeño que  $U$ , contradiciendo que  $U$  es mínimo.

**Definición 3.2.2.** El **número de conexidad** (por vértices)  $\kappa(G)$  de  $G$  se

define como:

$$\kappa(G) = \min\{k \mid k = |S|, G - S \text{ desconexa o trivial con } S \subseteq V(G)\}.$$

Una gráfica  $G$  es  $k$ -**conexa** si  $\kappa(G) \geq k$ .

Observa que la gráfica  $G$  que aparece en la figura 3.4 no tiene vértices de corte. El conjunto  $W = \{v_1, v_3, v_4\}$ , es un conjunto de corte, pero no es mínimo. El conjunto  $S = \{v_1, v_3\}$  es un conjunto de corte mínimo, por lo tanto  $\kappa(G) = 2$

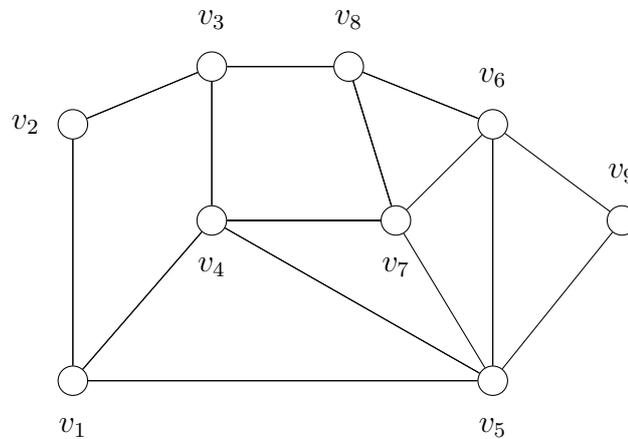


Figura 3.4: El conjunto  $S = \{v_1, v_3\}$  es un conjunto de corte mínimo.

Análogamente definimos los cortes por aristas y el número de conexidad por aristas de una gráfica.

**Definición 3.2.3.** Sea  $G$  una gráfica no trivial. Un subconjunto  $F \subseteq A(G)$  es un **conjunto de corte por aristas** de  $G$  si  $G - F$  es desconexa.

Un conjunto de corte por aristas  $F$  de  $G$  es **minimal** si ningún subconjunto propio de  $F$  es un conjunto de corte por aristas de  $G$ . Es decir, para cualquier  $e \in F$ ,  $F \setminus \{e\}$  no es un conjunto de corte por aristas. El **número de conexidad por aristas**  $\kappa'(G)$  se define como:

$$\kappa'(G) = \min\{k \mid k = |F|, G - F \text{ desconexa o trivial, } F \subseteq A(G)\}.$$

Diremos que  $G$  es  $k$ -**arista conexa** si  $\kappa'(G) \geq k$ .

Cuando quitamos un conjunto de corte minimal de una gráfica conexa podemos tener varias componentes conexas, como se muestra en la figura 3.5. Cuando quitamos un conjunto de corte por aristas minimal solo podemos obtener dos componentes conexas.

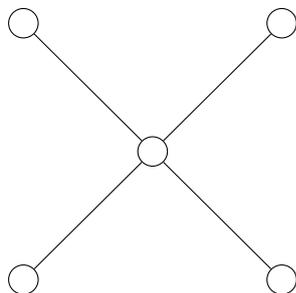


Figura 3.5: Al quitar el vertice central quedan 4 bloques.

**Lema 3.2.1.** Si  $F$  es un conjunto de corte por aristas minimal de una gráfica conexa  $G$ , entonces  $c(G - F) = 2$ .

*Demostración.* Como  $G - F$  es disconexa y  $F$  minimal, para toda arista  $e \in F$  la subgráfica  $H = G - (F \setminus \{e\})$  es conexa. Por lo tanto,  $e$  es un puente de  $H$  y de acuerdo con el lema 2.2.1,  $c(H - e) = 2$ , en consecuencia  $c(G - F) = 2$  ya que  $H - e = G - F$ .  $\square$

Respecto a la conexidad, tenemos las siguientes observaciones:

1.  $\kappa(G) = 0$  si y sólo si  $G$  es disconexa o trivial.
2. Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ ,  $\kappa(G) = n - 1$  si y sólo si  $G$  es completa.
3. Si  $G$  es conexa, entonces es 1-conexa.
4. Sea  $G$  una gráfica, entonces  $\kappa(G) = 1$  si y sólo si  $G = K_2$  o  $G$  es conexa con un vértice de corte.
5. Una gráfica  $G$  es  $k$ -conexa si y sólo si al quitar menos de  $k$  vértices la gráfica no se desconecta ni se vuelve trivial.

Se puede determinar la conexidad por aristas de algunas familias de gráficas, como la completa.

**Teorema 3.2.1.** Para todo entero positivo  $n$ , se tiene que  $\kappa'(K_n) = n - 1$ .

*Demostración.* Por definición,  $\kappa'(K_1) = 0$ . Sea  $G = K_n$  con  $n \geq 2$ . Como todo vértice de  $G$  tiene grado  $n - 1$ , si quitamos las  $n - 1$  aristas que inciden en un vértice, se obtiene una gráfica disconexa. Por lo tanto  $\kappa'(G) \leq n - 1$ . Ahora, sea  $X \subseteq A(G)$  un conjunto de corte mínimo por aristas de  $G$ . Es decir,  $|X| = \kappa'(G)$ . Entonces,  $G - X$  tiene exactamente dos componentes conexas  $G_1$  y  $G_2$ , donde  $G_1$  tiene orden digamos  $k$  y  $G_2$  tiene orden  $n - k$ . Como  $X$  está formado por todas las aristas que unen  $G_1$  y  $G_2$  y  $G$  es

completa,  $|X| = k(n - k)$ . Además, como  $k \geq 1$  y  $n - k \geq 1$ , se tiene que  $(k - 1)(n - k - 1) \geq 0$  y por lo tanto  $(k - 1)(n - k - 1) = k(n - k) - n + 1 \geq 0$ . Así,  $\kappa'(G) = |X| = k(n - k) \geq n - 1$ . Por lo tanto  $\kappa'(G) = n - 1$ .  $\square$

Es siguiente teorema se conoce como la desigualdad de Whitney y es un clásico en el área de la conexidad.

**Teorema 3.2.2** (Desigualdad de Whitney). Para toda gráfica  $G$ ,

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

*Demostración.* Si  $G$  es desconexa o trivial, entonces  $\kappa(G) = \kappa'(G) = 0$  y la desigualdad se cumple. Si  $G = K_n$ ,  $\kappa(G) = \delta(G) = n - 1 = \kappa'(G)$ , y la desigualdad también se satisface.

Supongamos entonces que  $G$  es de orden  $n > 2$  y que no es ni completa ni desconexa. Así,  $\delta(G) \leq n - 2$ . Primero veamos que  $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ . Sea  $v \in V(G)$  de grado  $\delta(G)$ , y sea  $F$  el conjunto de aristas de  $G$  incidentes en  $v$ . Observa que  $|F| = \delta(G)$  y  $G - F$  es desconexa o trivial. Por lo tanto  $\kappa'(G) \leq \delta(G) \leq n - 2$ .

Veamos ahora que  $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$ . Sea  $X \subseteq A(G)$  un conjunto de corte mínimo por aristas, es decir,  $|X| = \kappa'(G) \leq n - 2$ . Sean  $G_1$  y  $G_2$  las dos componentes conexas de  $G - X$  y  $k$  el orden de  $G_1$  y en consecuencia  $n - k$  el orden de  $G_2$ ; con  $k \geq 1$  y  $n - k \geq 1$ . ( $\star$ )

Se tienen dos casos posibles.

**Caso 1** Todo vértice de  $G_1$  es adyacente a todo vértice de  $G_2$  en  $G$ . Así,  $|X| = k(n - k)$ , luego, de acuerdo con ( $\star$ ):  $(k - 1)(n - k - 1) \geq 0$  por lo tanto  $k(n - k) - n + 1 \geq 0$ , es decir,  $|X| = k(n - k) \geq 1$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto este caso no es posible.

**Caso 2** Existen vértices  $u$  y  $v$  en  $G_1$  y  $G_2$ , respectivamente, tales que  $uv \notin A(G)$ . Definimos el conjunto  $U \subseteq V(G)$  como sigue: Para cada  $e \in X$ , se elige un vértice para  $U$  del siguiente modo: si en  $u$  incide  $e$ , entonces escogemos como elemento de  $U$  el otro vértice en  $G_2$  en el cual incide  $e$ ; en otro caso se elige el vértice que está en  $G_1$  y en el cual incide  $e$ . Entonces,  $|U| \leq |X|$ . Como  $u, v \notin U$  y no existe una  $(u, v)$ -trayectoria en  $G - U$ ,  $G - U$  es desconexa, de manera que

$$\delta(G) \geq \kappa'(G) = |X| \geq |U| \geq \kappa(G).$$

Por lo tanto,  $\delta(G) \geq \kappa'(G) \geq \kappa(G)$ .

$\square$

**Teorema 3.2.3.** Si  $G$  es una gráfica cúbica, entonces  $\kappa(G) = \kappa'(G)$ .

*Demostración.* Si  $G$  es cúbica, entonces  $\kappa(G) = 0 = \kappa'(G)$  si y sólo si  $G$  es desconexa. Si  $\kappa(G) = 3$ , entonces, de acuerdo con el teorema anterior  $3 \leq \kappa'(G) \leq 3$ , por lo tanto  $\kappa'(G) = 3$ . Así, sólo queda revisar dos casos, el caso en que  $\kappa(G) = 1$  y el caso en que  $\kappa(G) = 2$ .

Sea  $U$  un conjunto de corte mínimo de  $G$ . Entonces  $|U| = 1$  o  $|U| = 2$ . Así,  $G - U$  es desconexa. Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos componentes conexas de  $G - U$ . Como  $G$  es cúbica, para cada  $u \in U$ , al menos una de entre  $G_1$  y  $G_2$  contiene exactamente un vecino de  $u$ .

**Caso 1**  $\kappa(G) = |U| = 1$ . Entonces  $U$  consiste en un vértice de corte  $u$  de  $G$ .

Como alguna componente de  $G - U$  contiene exactamente un vecino  $w$  de  $u$ , la arista  $uw$  es un puente de  $G$  y por lo tanto  $\kappa'(G) = \kappa(G) = 1$ .

**Caso 2**  $\kappa(G) = |U| = 2$ . Sea  $U = \{u, v\}$ . Si  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G$ , entonces  $u$  y  $v$  tienen cada uno exactamente un vecino en una misma componente de  $G - U$ , digamos  $u'$  y  $v'$ , respectivamente. Entonces,  $X = \{uu', vv'\}$  es un conjunto de corte por aristas de  $G$ , en consecuencia  $\kappa'(G) \leq 2$  pero  $2 = \kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq 2$ , por lo tanto  $\kappa'(G) = \kappa(G) = 2$ .

Supongamos que  $u$  y  $v$  no son adyacentes, entonces se tienen dos casos. El primero se reduce al anterior, en caso de que  $u$  y  $v$  tengan un único vecino en una misma componente.

Supongamos entonces que  $u$  tiene un único vecino  $u'$  en  $G_1$  y dos vecinos en  $G_2$  mientras que  $v$  tiene un vecino  $v'$  en  $G_2$  y dos en  $G_1$ . De manera que  $X = \{u'u, vv'\}$  es un conjunto de corte por aristas de  $G$  y por lo tanto  $\kappa'(G) = \kappa(G) = 2$ .

□

### 3.3. Teorema de Menger

El Teorema de Menger es un resultado importante en la teoría de las gráficas, que establece una relación entre la conexidad de una gráfica y la existencia de trayectorias disjuntas entre pares de vértices.

**Teorema 3.3.1.** Sea  $G$  una gráfica conexa y sean  $u, v \in V(G)$  vértice no adyacentes. Entonces, el mínimo número de vértices que separa a  $u$  y  $v$  es igual al máximo número de  $(u, v)$ -trayectorias independientes.

*Demostración.* Primero notemos que si un subconjunto  $S \subseteq V(G)$  es un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo, entonces toda  $(u, v)$ -trayectoria de  $G$  contiene al menos un vértice de  $S$ . Por lo tanto, el número de  $(u, v)$ -trayectorias independientes es a lo más  $|S|$ .

Así, basta con probar que si se tiene un  $(u, v)$ -conjunto de separación mínimo con  $k$  vértices, entonces existen  $k$   $(u, v)$ -trayectorias independientes. La prueba la haremos por inducción sobre el tamaño (número de aristas) de la gráfica. Supongamos que  $G$  es una gráfica de tamaño  $m$ .

Si  $m = 0$ ,  $m = 1$  o  $m = 2$  se puede ver que la afirmación se cumple.

Supongamos que la afirmación es válida para toda gráfica de tamaño menor que  $m$ , con  $m > 2$ .

Sea  $G$  una gráfica conexa de tamaño  $m$ . Sean  $u, v \in V(G)$  no adyacentes. Supongamos que existe un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo con  $k$  vértices.

Como el resultado es inmediato si  $k = 0$  o  $k = 1$ , asumamos  $k \geq 2$ . Se tienen entonces tres casos posibles:

- Caso 1) Existe un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo  $U$  que contiene un vértice adyacente a  $u$  y a  $v$  (ver figura 3.6).

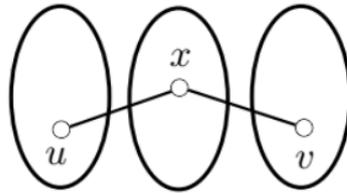


Figura 3.6: Caso 1)

Así, el tamaño de  $G - x$  es menor que  $m$  y  $U \setminus \{x\}$  es un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo de  $G - x$ . Por lo tanto existen en  $G - x$   $k - 1$   $(u, v)$ -trayectorias independientes. En consecuencia en  $G$  existen  $k$   $(u, v)$ -trayectorias independientes, las de  $G - x$  y  $uxv$ .

- Caso 2) Existe un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo  $W$  en  $G$  que contiene un vértice que no es adyacente a  $u$  y uno que no es adyacente a  $v$  (ver figura 3.7).

Sean  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  y  $G_u$  la subgráfica de  $G$  que consiste de todas las  $(u, w_i)$ -trayectorias en  $G$ , donde sólo los  $w_i$  pertenecen a  $W$  para cada  $1 \leq i \leq k$ . Y sea  $G'_u$  la gráfica que se obtiene de  $G_u$  al agregar un nuevo vértice  $v'$  y unirlo a cada vértice  $w_i$  con  $1 \leq i < k$ . Sea  $G_v$  construida de manera análoga donde  $G'_v$  se obtiene de  $G_v$  al agregar un

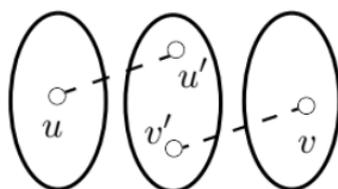


Figura 3.7: Caso 2)

nuevo vértice  $u'$  y hacerlo adyacente a cada  $w_i$ . Como  $W$  contiene un vértice que no es adyacente a  $u$  y un vértice que no es adyacente a  $v$ , el tamaño de  $G'_u$  y el de  $G'_v$  es estrictamente menor que  $m$ . Como  $W$  es un  $(u, v')$ -conjunto de corte mínimo en  $G'_u$ , de acuerdo con la hipótesis de inducción  $G'_u$  contiene  $k$   $(u, v')$ -trayectorias independientes, cada una de las cuales consiste de una  $(u, w_i)$ -trayectoria  $P_i$  seguida de la arista  $w_i v'$ . De manera análoga, existen  $k$   $(u', v)$ -trayectorias internamente ajenas en  $G'_v$ , cada una de las cuales consistede una  $(w_i, v)$  trayectoria  $Q_i$  antecedida por la arista  $u' w_i$ . Como  $W$  es un  $(u, v)$ -conjunto de corte en  $G$ , las dos gráficas  $G_u$  y  $G_v$  tienen en común sólo los vértices de  $W$ . Por lo tanto, las  $k$  trayectorias que se obtienen de concatenar  $P_i Q_i$  son  $(u, v)$ -trayectorias independientes en  $G$ .

Caso 3) Supongamos que para todo  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo  $S$  de  $G$  los elementos de  $S$  son adyacentes a  $u$  y no a  $v$  o que para todo  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo  $S$  de  $G$  los elementos de  $S$  son adyacentes a  $v$  y no a  $u$  (ver figura 3.8).

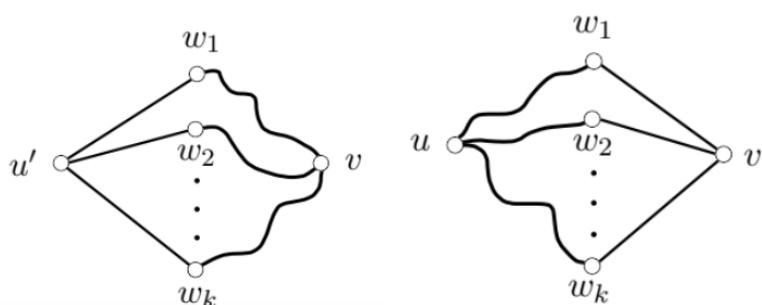


Figura 3.8: Caso 3)

Sea  $P = (u, x, y, \dots, v)$  una  $(u, v)$ -geodésica en  $G$  y sea  $e = xy$ . Ahora, sea  $G' = G - e$ . Claramente todo  $(u, v)$ -conjunto de corte míni-

mo en  $G - e$  contiene al menos  $k - 1$  vértices. De hecho, todo  $(u, v)$ -conjunto de corte en  $G - e$  contiene  $k$  vértices ya que se lo contrario, supongamos que  $G - e$  contiene un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{k-1}\}$ . Entonces,  $Z \cup \{x\}$  es un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo en  $G$ . Como  $x$  es adyacente a  $u$ , todos los  $z_i$  son adyacentes a  $u$ . Pero  $Z \cup \{y\}$  también es un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo de  $G$ , y como todos los  $z_i$  son adyacentes a  $u$ , también  $y$  lo es, lo cual es una contradicción ya que  $P$  es geodésica. Por lo tanto  $k$  es el menor número de vértices posibles en un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo de  $G - e$ . Luego, de acuerdo con la hipótesis de inducción, existen  $k$   $(u, v)$ -trayectorias independientes en  $G - e$  y por lo tanto en  $G$ .

□

**Lema 3.3.1.** Si  $G$  es una gráfica  $k$ -conexa y  $e \in A(G)$ , entonces  $G - e$  es  $(k - 1)$ -conexa.

*Demostración.* Sea  $G$   $k$ -conexa y  $e = xy \in A(G)$ . Supongamos que  $G - e$  es  $q$ -conexa con  $q < k - 1$  y sea  $U$  un conjunto de corte mínimo en  $G - e$ . Así,  $U \cup \{x\}$  es un conjunto de corte de  $G$  y  $q + 1 = |U \cup \{x\}| \leq k - 1$ , lo cual es una contradicción. □

**Teorema 3.3.2** (Menger). Sea  $G$  una gráfica no trivial  $G$  y  $k \geq 2$  un entero,  $G$  es  $k$ -conexa si y sólo si para cualquier pareja de vértices distintos  $u, v$ , existen al menos  $k$   $(u, v)$ -trayectorias independientes.

*Demostración.* Como el resultado se cumple si  $G$  es completa, probémoslo para gráficas no completas.

$\Rightarrow$ ) Sea  $G$  una gráfica no completa y  $k$ -conexa, con  $k \geq 2$ . Sean  $u, v$  dos vértices distintos de  $G$ . Supongamos primero que  $u$  y  $v$  no son adyacentes en  $G$  y sea  $U$  un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo. Entonces,  $|U| \geq \kappa(G) \geq k$ . De acuerdo con el teorema anterior,  $G$  contiene al menos  $k$   $(u, v)$ -trayectorias independientes. Si  $u, v$  son adyacentes, con  $e = uv$ , entonces, debido al lema anterior,  $G - e$  es  $(k - 1)$ -conexa. Sea  $W$  un  $(u, v)$ -conjunto de corte mínimo en  $G - e$ , entonces

$$|W| \geq \kappa(G - e) \geq k - 1.$$

De acuerdo con el teorema de Menger,  $G - e$  contiene  $k - 1$   $(u, v)$ -trayectorias independientes y por lo tanto  $G$  contiene al menos  $k$   $(u, v)$ -trayectorias independientes las  $k - 1$  de  $G - e$  junto con  $uv$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $G$  una gráfica que contiene al menos  $k$   $(u, v)$ -trayectorias independientes para cada pareja  $uv$  de vértices distintos en  $G$ . Sea  $U$  un conjunto de corte mínimo en  $G$ . Entonces  $|U| = \kappa(G)$ . Sean  $x, y$  vértices en distintas componentes de  $G - U$ . Entonces,  $U$  es un  $(x, y)$ -conjunto de corte en  $G$ . Como hay al menos  $k$   $(x, y)$ -trayectorias independientes en  $G$ , de acuerdo con el teorema anterior se tiene que  $\kappa(G) = |U| \geq k$ . Por lo tanto  $G$  es  $k$ -conexa.

□

Se puede extender el concepto de trayectoria si en lugar de considerar dos vértices consideramos dos conjuntos de vértices.

**Definición 3.3.1.** Sean  $X, Z \subseteq V(G)$ . Una  $(X, Z)$ -trayectoria es una trayectoria con un extremo en  $X$  el otro en  $Z$  y cuyos vértices internos no pertenecen a  $X \cup Z$ .

**Lema 3.3.2.** Sea  $G$  una gráfica  $k$ -conexa y  $H$  la gráfica que se obtiene de  $G$  al agregar un nuevo vértice  $w$  y unirlo a al menos  $k$  vértices de  $G$ . Entonces  $H$  es también  $k$ -conexa.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica  $k$ -conexa y  $H$  la gráfica que obtiene como se indica en el lema. Observa que  $V(H) = V(G) \cup \{w\}$ . Sea  $S \subseteq V(H)$  con  $|S| = k - 1$ . Para completar la prueba es suficiente probar que  $H - S$  es conexa.

Supongamos primero que  $w \in S$ . Entonces,  $H - S = G - (S \setminus \{w\})$ . De acuerdo con la hipótesis,  $G$  es  $k$ -conexa y  $|S \setminus \{w\}| = k - 2$ . Por lo tanto  $H - S$  es conexa.

Supongamos ahora que  $w \notin S$ . Como por hipótesis  $w$  tiene al menos  $k$  vecinos en  $V(G)$  y  $|S| = k - 1$ , existe un vecino  $z$  de  $w$  que no pertenece a  $S$ . Como  $G$  es  $k$ -conexa,  $G - S$  es conexa. Más aún,  $z$  es un vértice de  $G - S$  y por lo tanto  $wz \in A(H - S)$ . Se sigue entonces que  $(G - S) + wz$  es una subgráfica conexa generadora de  $H - S$ . Por lo tanto  $H - S$  es conexa. □

De este lema se deduce la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.1.** Sea  $G$  una gráfica  $k$ -conexa y sean  $X, Z$  dos subconjuntos de  $V(G)$  de cardinalidad al menos  $k$ . Entonces existen en  $G$  una familia de  $k$   $(X, z)$ -trayectorias internamente ajenas.

*Demostración.* Obténgase una nueva gráfica  $H$  de  $G$  al agregar a esta última dos vértices  $x$  y  $z$  y unir a  $x$  con todo vértice de  $X$  y a  $z$  con todo vértice de  $Z$ , ver la figura 3.9. De acuerdo con el lema anterior,  $H$  es  $k$ -conexa. Por lo tanto, de acuerdo el teorema de Menger existen  $k$   $(x, z)$ -trayectorias independientes

en  $H$ . Al borrar  $x$  y  $z$  de cada una de éstas, se obtienen  $k$  trayectorias ajenas  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$  en  $G$ , cada una de las cuales tiene su vértice inicial en  $X$  y su vértice terminal en  $Z$ . Toda trayectoria  $Q_i$  necesariamente contiene un segmento  $P_i$  con un vértice inicial en  $X$ , su vértice terminal en  $Z$  y ningún vértice en  $X \cup Z$ , es decir, una  $(X, Z)$ -trayectoria, además dichas trayectorias son internamente ajenas.  $\square$

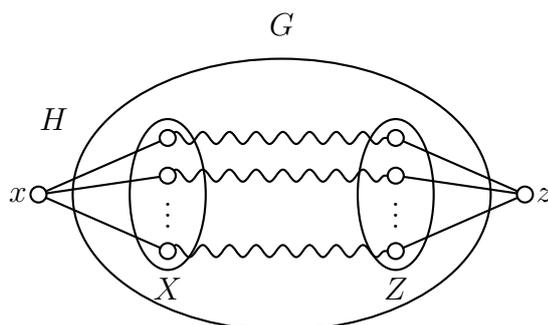


Figura 3.9: Construcción de la gráfica  $H$

**Definición 3.3.2.** A una familia de  $k$   $(\{x\}, Y)$ -trayectorias internamente ajenas cuyos vértices terminales son distintos se le llama  $k$ -**ventilador** de  $x$  a  $Y$ , o un  $(x, Y)$ -**ventilador** con  $k$  trayectorias.

Como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente resultado cuya prueba es análoga a la de la proposición anterior.

**Proposición 3.3.2** (El Lema del ventilador). Sea  $G$  una gráfica  $k$ -conexa y  $x \in V(G)$ ,  $Y \subseteq V(G) \setminus \{x\}$  con  $|Y| \geq k$ . Entonces existe un  $k$ -ventilador en  $G$  de  $x$  a  $Y$ .

*Demostración.* Consideremos la gráfica  $H$  que resulta de agregar un vértice  $y'$  a  $G$  y unirlo con todos los vértices de  $Y$ . Así,  $H$  es  $k$ -conexa y de acuerdo con el teorema de Menger, existen al menos  $k$   $(x, y')$ -trayectorias independientes en  $H$ . Si a estas trayectorias se les quita  $y'$ , entonces se obtienen  $k$  trayectorias  $Q_1, \dots, Q_k$  tales que empiezan en  $x$  y terminan en un vértice de  $Y$ . Con un razonamiento análogo al de la prueba anterior, concluimos que existe un  $k$ -ventilador en  $G$  de  $x$  a  $Y$ .  $\square$

El último resultado que presentamos en este capítulo relaciona la conexidad de una gráfica con su estructura cíclica.

**Teorema 3.3.3** (Dirac (1960)). Sea  $G$  una gráfica  $k$  conexa, entonces cualesquiera  $k$  vértices pertenecen a un mismo ciclo.

*Demostración.* Por inducción sobre  $k$ . Anteriormente, en el teorema 3.1.4, probamos que la afirmación es verdadera para  $k = 2$ , asumamos entonces que  $k \geq 3$ . Sean  $S \subseteq V(G)$  con  $|S| = k$ ,  $x \in S$  y  $T = S \setminus \{x\}$ . Como  $G$  es  $k$ -conexa, es  $(k-1)$ -conexa. Así, de acuerdo con la hipótesis de inducción hay un ciclo  $C$  en  $G$  que contiene a  $T$ . Sea  $Y = V(C)$ . Si  $x \in Y$ , entonces  $C$  incluye todos los vértices de  $S$ . Asumamos entonces que  $x \notin Y$ . Si  $|Y| \geq k$ , el Lema del ventilador asegura la existencia de un  $k$ -ventilador en  $G$  de  $x$  a  $Y$ . Como  $|T| = k - 1$ , el conjunto  $T$  divide a  $C$  en  $k - 1$  segmentos ajenos en aristas. De acuerdo con el principio del palomar, hay al menos dos trayectorias del  $k$ -ventilador,  $P$  y  $Q$ , terminan en el mismo segmento. La subgráfica  $C \cup P \cup Q$  contiene tres ciclos, uno de los cuales incluye  $S = T \cup \{x\}$ . Si  $|Y| = k - 1$ , el Lema del ventilador asegura la existencia de un  $(k - 1)$ -ventilador de  $x$  a  $Y$  en el cual todo vértice de  $Y$  es el término de una trayectoria y concluimos como antes.  $\square$

### 3.4. Ejercicios

1. Sea  $G$  un gráfica de orden 10 con tres componentes conexa. Demuestra que una componente tiene al menos 4 vértices.
2. Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  con exactamente dos componentes conexas. Si ambas componentes son gráficas completas, demuestra que el tamaño de  $G$  es al menos  $(n^2 - 2n)/4$ .
3. Sea  $G$  una gráfica, demuestra que si  $G$  no es conexa, entonces el complemento de  $G$  es conexa.
4. Sea  $G$  una gráfica conexa y  $v$  un vértice de corte de  $G$ . Demuestra que  $v$  no puede ser un vértice de corte del complemento de  $G$ .



# Capítulo 4

## Recorridos

Los recorridos en graficas han sido estudiados desde los comienzos de la teoría de las graficas. Hoy en día son utilizados para la planificación de rutas de transporte, diseños de circuitos electrónicos y diseño de redes de comunicaciones entre otras cosas.

En este capítulo veremos dos tipos de recorridos en graficas: los recorridos Eulerianos y los recorridos Hamiltonianos.

### 4.1. Gráficas Eulerianas

Las gráficas Eulerianas son una familia de gráficas que se caracteriza por tener un camino que empieza y termina en el mismo vértice y que utiliza cada arista de la gráfica exactamente una vez. Estas gráficas reciben este nombre en honor al matemático suizo Leonhard Euler, quien resolvió el famoso problema de los puentes de Königsberg.

#### 4.1.1. Los puentes de Königsberg

El problema de los puentes de Königsberg es uno de los problemas más conocidos dentro de la Teoría de las gráficas. La ciudad de Königsberg estaba atravesada por dos ríos, el Pregel y el Schwöne, en medio de los cuales había dos islas, las cuales estaban conetadas entre si y con las riveras con siete puentes (ver figura 4.1.1). Los habitantes de la ciudad trataban de encontrar un camino que cruzara cada uno de los siete puentes una sola vez y regresara al punto de partida. Este problema fue muy discutido por los ciudadanos de Königsber durante mucho tiempo sin encontrar una solución.

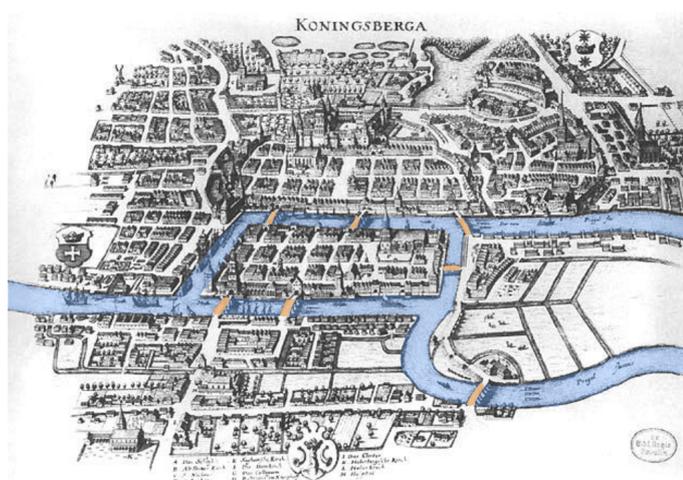


Figura 4.1: La ciudad de Königsberg.

Leonhard Euler, abordó el problema y demostró que no era posible encontrar tal camino. La solución presentada por Euler sentó las bases para el desarrollo de la teoría de las gráficas, quizá por esto, este problema se considera un hito dentro de la teoría de las gráficas

Para resolver este problema, lo modelamos con una gráfica  $G$ . Las regiones de tierra serán los vértices de  $G$  y los puentes las aristas. Se puede ver que un paseo que utiliza todos los puentes de la ciudad y regresa al punto de partida se respresenta en  $G$  como un paseo que utiliza todas las aristas de  $G$  y que comienza y termina en el mismo vértice. Se puede ver que en esta gráfica, todos los vértices tienen grado impar, lo que prueba que no hay un camino que cruzara todos los puentes una sola vez.

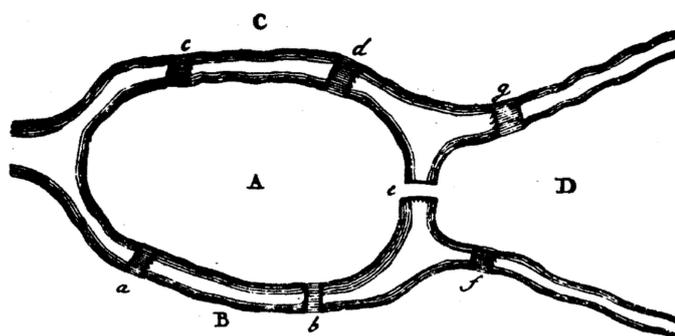


Figura 4.2: El dibujo que aparece en el artículo de Euler, etiquetando los puentes, ( $a, b, c, d, e, f$ ) las riveras ( $B, C$ ) y las islas ( $A, D$ ).

## 4.2. Gráficas Eulerianas

Del problema de los puentes de Königsberg surge la motivación para la definición de gráficas Eulerianas.

**Definición 4.2.1.** Un *paseo* en una gráfica  $G$  es un camino que no repite aristas. Un *paseo Euleriano* es un paseo que contiene a todas las aristas de  $G$ . Un *circuito* de  $G$  es un paseo cerrado. Se dice que una *gráfica* conexa  $G$  es *Euleriana* si tiene un paseo Euleriano cerrado al cual se le llama *circuito Euleriano* o tour Euleriano.

Notemos que si  $W = e_1e_2\dots e_n$  es un circuito, también lo es  $W' = e_i e_{i+1} \dots e_n e_1 \dots e_{i-1}$ .

En la figura 4.3 se muestra una gráfica no Euleriana ¿puedes justificarlo?

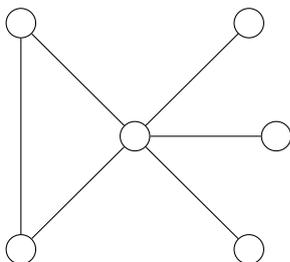


Figura 4.3: La gráfica no tiene un paseo Euleriano.

Las gráficas Eulerianas tienen una caracterización (en términos de los grados de la gráfica) muy sencilla y fácil de verificar.

**Teorema 4.2.1** (Euler (1736), Hierholzer (1873)). Una gráfica conexa  $G$  es Euleriana si y sólo si todo vértice de  $G$  tiene grado par.

*Demostración.* Supongamos que  $W : u \xrightarrow{*} u$  es un circuito Euleriano. Sea  $v \in V(G) \setminus \{u\}$  un vértice que aparece  $k$  veces en el circuito  $W$ . Observa que cada vez que una arista llega al vértice  $v$ , otra arista sale de  $v$ , y por lo tanto  $d_G(v) = 2k$ . Del mismo modo, si  $u$  aparece internamente en  $W$ ,  $k'$  veces, como  $W$  empieza y termina en  $u$ ,  $d_G(u) = 2k' + 2$ .

Para la segunda implicación, asumamos que  $G$  es una gráfica conexa y no trivial tal que el grado de cada vértice de  $G$  es par. Sea

$$W = e_1e_2\dots e_n : v_0 \xrightarrow{*} v_k,$$

con  $e_i = v_{i-1}v_i$  un paseo máximo en  $G$ . De manera que todas las  $e = v_k w$  aristas están en  $W$ , de lo contrario  $W$  podría ser prolongado a  $We$ . En particular,  $v_0 = v_k$ , es decir,  $W$  es un circuito. Ya que si  $v_k \neq v_0$  y  $v_k$  ocurre  $q$

veces en  $W$ , entonces  $d_G(v_k) = 2(q-1) + 1$ , en contradicción con la hipótesis sobre los grados de los vértices.

Afirmamos que  $W$  es un circuito Euleriano. Ya que si no lo es, como  $G$  es conexa, existe una arista  $f = v_i u \in A(G) \setminus A(W)$  para algún  $i$ ; y en dicho caso  $e_{i+1} \dots e_k e_1 \dots e_i f$  es un paseo en  $G$  mayor a  $W$ , lo cual es imposible.  $\square$

**Teorema 4.2.2.** Una gráfica conexa tiene un paseo Euleriano si y sólo si tiene a lo más dos vértices de grado impar.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $G$  una gráfica conexa con un paseo Euleriano  $W : u \xrightarrow{*} v$ . Como se mencionó en la prueba del teorema anterior, todos los vértices internos tienen grado par, entonces a lo más  $u$  y  $v$  tienen grado impar.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $G$  es conexa y que tiene a lo más dos vértices de grado impar. Si no contiene vértices de grado impar, de acuerdo con el teorema anterior, contiene un circuito Euleriano y por lo tanto un paseo Euleriano. Observemos que el otro caso es que haya exactamente dos vértices de grado impar (lema del apretón de manos). Sean  $u, v \in V(G)$  dichos vértices. Considérese  $H$  la gráfica obtenida al agregar a  $G$  un vértice  $w$  y las aristas  $uw$  y  $vw$ . En  $H$  todo vértice tiene grado par, por lo tanto contiene un circuito Euleriano  $C : u \xrightarrow{*} v \rightarrow w \rightarrow u$ . Y si a  $C$  se elimina  $vwu$ , se obtiene un  $u \xrightarrow{*} v$  paseo Euleriano.  $\square$

La idea de una gráfica Euleriana puede ser ajustada y encontrar un equivalente para los vértices.

### 4.3. Gráficas Hamiltonianas

Las gráficas Hamiltonianas son un tipo especial de gráficas que se caracterizan por tener un camino cerrado que pasa por cada vértice exactamente una vez. Estas gráficas deben su nombre al matemático irlandés William Rowan Hamilton, quien en 1857 desarrolló un juego, el cual consiste en encontrar una ruta que visite todas las ciudades en un mapa sin repetir ninguna de ellas. Este problema se ha convertido en uno de los problemas más famosos y estudiados en la teoría de gráficas.

**Definición 4.3.1.** Una trayectoria  $P$  de una gráfica  $G$  es una **trayectoria Hamiltoniana** si  $P$  contiene a todos los vértices de  $G$ . Un ciclo  $C$  es un **ciclo Hamiltoniano** si contiene a todos los vértices de  $G$ . Una **gráfica es Hamiltoniana** si contiene un ciclo Hamiltoniano.

Ejemplos de gráficas Hamiltonianas:

- $C_n$  es Hamiltoniana para todo  $n \geq 3$
- $K_n$  es Hamiltoniana para todo  $n \geq 3$
- $K_{3,3}$  es Hamiltoniana
- $K_{5,6}$  no es Hamiltoniana

**Lema 4.3.1.** Si  $G$  es Hamiltoniana, entonces para todo subconjunto no vacío  $S \subseteq V(G)$ ,  $c(G - S) \leq |S|$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica y sea  $S$  un subconjunto no vacío de vértices de  $G$  y sea  $u \in S$ . Como  $G$  es Hamiltoniana, considérese  $C : u \xrightarrow{*} u$  un ciclo Hamiltoniano de  $G$ . Sean  $G_1, \dots, G_k$  las componentes conexas de  $G - S$ . Si  $k = 1$ , se satisface lo deseado. Supongamos entonces que  $k > 1$ . Sea  $u_i$  el último vértice de  $C$  que pertenece a la componente  $G_i$  y sea  $v_i$  el vértice que le sigue a  $u_i$  en el ciclo  $C$ . Entonces  $v_i \in S$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , por la elección de  $u_i$ , y  $v_i \neq v_j$  para cualesquiera  $i \neq j$ , esto ya que  $C$  es un ciclo y  $u_i v_i \in G$  para todo  $i$ . Por lo tanto  $|S| \geq k = c(G - S)$ .  $\square$

Como resultado inmediato podemos ver que los vértices de corte no ayudan para la hamiltonicidad.

**Corolario 4.3.1.** Si una gráfica  $G$  contiene un vértice de corte, entonces  $G$  no es Hamiltoniana.

Existen muchos resultados que dan condiciones suficientes para garantizar que una gráfica es Hamiltoniana. Algunos de estos resultados de deben G. Dirac (1952) y O. Ore (1960). Las condiciones que presentan, principalmente aseguran que una gráfica es hamiltoniana si tiene “muchas aristas”.

El siguiente teorema nos da condiciones sobre la suma de los grados de los vértices de una gráfica para que esta sea Hamiltoniana.

**Teorema 4.3.1.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 3$ . Si  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$  para cada par de vértices no adyacentes de  $G$ , entonces  $G$  es Hamiltoniana.

*Demostración.* Supongamos que, por el contrario, existe una gráfica no Hamiltoniana  $G$  de orden  $n \geq 3$  tal que  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$  para cada par de vértices no adyacentes de  $G$ . Consideremos la gráfica  $H$  que resulta de agregar a  $G$  tantas aristas como sea posible, de manera que la gráfica siga siendo no Hamiltoniana. De este modo, al agregar cualquier arista a  $H$ , la gráfica resultante es Hamiltoniana. Además,  $d_H(u) + d_H(v) \geq n$  para cualquier pareja  $u, v \in V(G)$  no adyacentes en  $H$ . Observa que  $H$  no es completa, ya que

la gráfica completa es Hamiltoniana. Entonces  $H$  contiene parejas de vértices no adyacentes. Sean  $x, y$  dos vértices no adyacentes en  $H$ . Entonces,  $H + xy$  es Hamiltoniana. Más aún, todo ciclo Hamiltoniano de  $H + xy$  tiene que contener a la arista  $xy$ . Esto significa que  $H$  contiene una  $(x, y)$ -trayectoria Hamiltoniana  $P = (x = x_1, x_2, \dots, x_n = y)$ . Observemos que siempre que  $x_1x_i$  sea una arista de  $H$ , con  $2 \leq i \leq n$ , entonces  $x_{i-1}x_n$  no es una arista de  $H$ , de lo contrario  $(x_1x_i, \dots, x_n, x_{i-1}, \dots, x_1)$  es un ciclo Hamiltoniano de  $H$ . Por lo tanto, para cada vértice en  $\{x_2, \dots, x_n\}$  que es adyacente a  $x_1$ , hay un vértice en  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$  que no es adyacente a  $x_n$ . Esto implica que

$$d_H(x_n) \leq (n - 1) - d_H(x_1)$$

y por lo tanto  $d_H(x_n) + d_H(x_1) \leq n - 1$ , lo cual es imposible.  $\square$

Observa que la condición sobre los grados del teorema anterior es suficiente pero no es necesaria, por ejemplo, el ciclo  $C_n$  es hamiltoniano y no cumple con las condiciones del teorema cuando  $n \geq 5$ .

**Corolario 4.3.2.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 3$ . Si  $d_G(v) \geq n/2$  para todo  $v \in V(G)$ , entonces  $G$  es Hamiltoniana.

**Teorema 4.3.2** (Ore (1962)). Sean  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 3$  y  $u, v \in V(G)$  tales que  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ . Entonces,  $G$  es Hamiltoniana si y sólo si  $G + uv$  es Hamiltoniana.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Si  $G$  es Hamiltoniana, para cualesquiera  $u, v \in V(G)$   $G + uv \subseteq G$ , por lo tanto también ésta es Hamiltoniana.

$\Leftarrow$ ) Sean  $G + uv$  una gráfica Hamiltoniana,  $C$  un ciclo Hamiltoniano de ésta, con  $u, v \in V(G)$  no adyacentes en  $G$  (de lo contrario la afirmación es inmediata). Sea  $e = uv$ . Si  $C$  no contiene a  $e$ ,  $C$  es un ciclo Hamiltoniano de  $G$ . Supongamos que  $e \in C$ . Asumimos así que  $C : u \xrightarrow{*} v \rightarrow u$ . Ahora,  $u = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n = v$  es una trayectoria Hamiltoniana de  $G$ . Existe  $i$  con  $1 < i < n$  tal que  $uv_i \in A(G)$  y  $v_{i-1}v \in A(G)$ . De lo contrario,  $d_G(v) < n - d_G(u)$ , en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto

$$u = v_1 \xrightarrow{*} v_{i-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \xrightarrow{*} v_{i+1} \rightarrow v_i \rightarrow v_1 = u$$

es un ciclo Hamiltoniano de  $G$ .  $\diamond$

$\square$

La siguiente operación es una herramienta que será de mucha utilidad en el estudio de la hamiltonicidad.

**Definición 4.3.2.** La *cerradura*  $Cl(G)$  de una gráfica  $G$  de orden  $n$  es la gráfica que se obtiene al agregar aristas de manera recursiva entre vértices no adyacentes cuya suma de grados sea al menos  $n$  (en la gráfica resultante en cada paso) hasta que no existan dos vértices no adyacentes con dicha propiedad.

Por ejemplo, considera la gráfica  $G$  que aparece en la figura 4.3. La gráfica tiene orden 8, y  $d(v_6) + d(v_8) = 4 + 4 = 8$ . Entonces, para aplicar la cerradura a  $G$ , en el primer paso agregamos la arista  $v_6v_8$ . En el siguiente paso, el grado de  $v_6$  ...

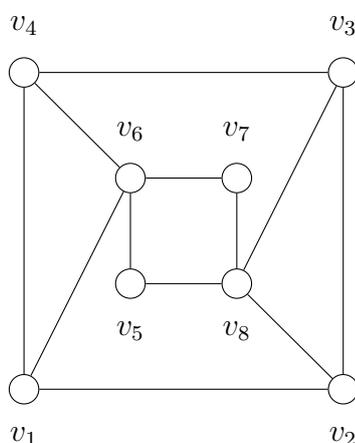


Figura 4.4: Una gráfica y su cerradura

Veamos que esta operación está bien definida, es decir, que no importa en que orden vayamos agregando las aristas a la gráfica, siempre obtendremos la misma cerradura.

**Lema 4.3.2.** La cerradura está definida de manera única para todas las gráficas de orden  $n \geq 3$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ . Supongamos que hay dos formas de cerrar  $G$ , digamos:

$$H = G + \{e_1, \dots, e_r\} \text{ y } H' = G + \{f_1, \dots, f_s\},$$

donde las aristas fueron agregadas en el orden marcado. Sean

$$H_i = G + \{e_1, \dots, e_i\} \text{ y } H'_i = G + \{f_1, \dots, f_i\}.$$

Para los valores iniciales se tiene que  $H_0 = G = H'_0$ . Sea  $e_k = uv$  la primera arista tal que  $e_k \neq f_i$  para todo  $1 \leq i \leq s$ . Entonces,  $d_{H_{k-1}}(u) + d_{H_{k-1}}(v) \geq n$ ,

ya que  $e_k \in H_k$ , pero  $e_k \notin H_{k-1}$ . Por la elección de  $e_k$ , tenemos que  $H_{k-1} \subseteq H'$  y por lo tanto también  $d_{H'}(u) + d_{H'}(v) \geq n$ , lo cual implica que  $e = uv \in H'$ , en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto  $H \subseteq H'$ .

Análogamente se deduce que  $H' \subseteq H$ , por lo tanto  $H = H'$ .  $\square$

Así, utilizando el teorema de Ore podemos caracterizar a las gráficas Hamiltonianas en términos de la cerradura.

**Teorema 4.3.3.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 3$ . Entonces,  $G$  es Hamiltoniana si y sólo si  $Cl(G)$  es Hamiltoniana.

Como aplicaciones del teorema 4.3.1 están los siguientes corolarios.

**Corolario 4.3.3.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 3$ . Si  $Cl(G)$  es una gráfica completa, entonces  $G$  es Hamiltoniana.

**Corolario 4.3.4.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 2$ , si  $d_G(u) + d_G(v) \geq n - 1$  para todo par de vértices no adyacentes  $u$  y  $v$ , entonces  $G$  contiene una trayectoria Hamiltoniana.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica que satisface las hipótesis del teorema. Sea  $G'$  la gráfica que se obtiene al agregar un vértice  $w$  a  $G$  y hacerlo adyacente a todo vértice de  $G$ . Así, para cualesquiera dos vértices no adyacentes en  $G'$  (y por tanto en  $G$ )  $d_{G'}(u) + d_{G'}(v) = d_G(u) + 1 + d_G(v) + 1 \geq n - 1 + 2 = n + 1$ . Así, de acuerdo con el teorema de Ore,  $G'$  es Hamiltoniana. Sea  $C : u_1 w u_2 \xrightarrow{*} u_1$  un ciclo Hamiltoniano de  $G'$ , entonces  $u_2 C u_1$  es una trayectoria Hamiltoniana de  $G$ .  $\square$

El siguiente teorema vincula la distribución de grados de los vértices con la existencia de un ciclo hamiltoniano.

**Teorema 4.3.4 (Pósa).** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 3$ . Si para todo entero  $j$ , con  $1 \leq j < n/2$ , el número de vértices de  $G$  con grado a lo más  $j$  es menor a  $j$ , entonces  $G$  es Hamiltoniana.

*Demostración.* Veamos que  $G' = Cl(G)$  es completa. Supongamos lo contrario. Para cada vértice  $v$  de  $G'$ , denotemos con  $d'(v)$  a  $d_{G'}(v)$ . Sean  $u, w$  vértices no adyacentes en  $G'$  con

$$d'(u) \leq d'(w) \quad (a)$$

y tales que  $d'(u) + d'(w)$  sea lo mayor posible dentro de todas las parejas de vértices no adyacentes en  $G'$ .

Como  $G'$  es la cerradura de  $G$ , ningún par de vértices no adyacentes en  $G'$  tiene suma de grados mayor o igual a  $n$ , entonces:

$$d'(u) + d'(w) \leq n - 1 \quad (b)$$

Sea  $k = d'(u)$ . Entonces, como  $d'(u) + d'(w) \leq n - 1$  y  $d'(u) \leq d'(w)$ ,

$$2d'(u) \leq d'(u) + d'(w) \leq n - 1$$

Por lo tanto  $k \leq (n - 1)/2 < n/2$ .

De (b) se tiene que:

$$d'(w) \leq n - k - 1 \quad (c)$$

Sea  $W$  el conjunto de todos los vértices en  $V(G) \setminus \{w\}$  que no son adyacentes a  $w$ . Por lo tanto,  $u \in W$ . Observemos que si  $v \in W$ , entonces  $d'(v) \leq k$ , de lo contrario

$$d'(v) + d'(w) > k + d'(w) = d'(u) + d'(w),$$

en contradicción con la elección de  $u$  y  $w$ .

Además,  $d(v) \leq d'(v) \leq k$  para todo  $v \in W$ , así, de acuerdo con la hipótesis inicial,  $|W| \leq k - 1$ . Por lo tanto:

$$d'(w) = (n - 1) - |W| \geq (n - 1) - (k - 1) = n - k,$$

lo cual contradice (c).

En conclusión, no existen dos vértices no adyacentes en  $G'$ , es decir,  $G'$  es completa y por lo tanto  $G$  es Hamiltoniana.  $\square$

**Teorema 4.3.5** (Chvátal (1972)). Sea  $G$  una gráfica de orden  $n \geq 3$  con sucesión de grados  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , donde  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ . Si no existe entero  $k < n/2$  tal que  $d_k \leq k$  y  $d_{n-k} < n - k$ , entonces  $G$  es Hamiltoniana.

*Demostración.* Sea  $G'$  la cerradura de  $G$ . Veamos que  $G'$  es completa. Denotemos con  $d'(v)$  a  $d_{G'}(v)$ . Supongamos que  $G'$  no es completa y sean  $u, v$  dos vértices no adyacentes en  $G'$  con

$$d'(u) \leq d'(v) \quad \dots \quad (a)$$

y tales que  $d'(u) + d'(v)$  es lo mayor posible dentro de todas las parejas de vértices no adyacentes en  $G'$ . Al ser  $G'$  la cerradura de  $G$ , ningún par de vértices no adyacentes en  $G$  tienen suma de grados mayor o igual a  $n$ , entonces:

$$d'(u) + d'(v) \leq n - 1 \quad \dots \quad (b)$$

Ahora, denotemos con  $S$  al conjunto de vértices en  $V \setminus \{v\}$  que no son adyacentes a  $v$  en  $G'$  y con  $T$  al conjunto de vértices en  $V \setminus \{u\}$  que no son adyacentes a  $u$  en  $G'$ . Claramente

$$|S| = n - 1 - d'(v) \quad \text{y} \quad |T| = n - 1 - d'(u) \quad \dots \quad (c)$$

Sea  $k = d'(u)$ . Notemos que, de acuerdo con (a) y (b),  $k < n/2$ . Por (b),  $d'(u) \leq n - 1 - d'(v)$ , de manera que

$$|S| = n - 1 - d'(v) \geq d'(u) = k,$$

y todo vértice  $w$  en  $S$  tiene grado a lo más  $k$ , de lo contrario  $d'(w) + d'(v) > d'(u) + d'(v)$ , lo cual no es posible de acuerdo con la elección de  $u$  y  $v$ . Por lo tanto, para todo  $w \in S$  ( $d'(w) \leq k$ ). Además,  $|T \cup \{u\}| = n - 1 - k + 1 = n - k$  y, también por la elección de  $u$  y  $v$ , todo vértice de  $T \cup \{u\}$  tiene grado menor o igual que  $d'(v)$ , pero, de acuerdo con (b)

$$d'(v) \leq n - 1 - d'(u) < n - k.$$

Por lo tanto, para todo  $w \in T \cup \{u\}$  ( $d'(w) < n - k$ ). Por lo tanto  $G'$  tiene al menos  $k$  vértices cuyo grado no excede  $k$  y al menos  $n - k$  vértices de grado estrictamente menor que  $n - k$ . Como  $G$  es una subgráfica generadora de  $G'$ , todos los vértices en  $S$ , siguen en  $G$  cumpliendo que su grado sea menor o igual que  $k$  ( $\forall w \in S$  ( $d(w) \leq d'(w) \leq k$ )). Así, en  $G$  existen al menos  $k$  vértices de grado a lo más  $k$ , y por cómo es la sucesión de grados,  $d_k \leq k$ . Además, también por ser  $G$  subgráfica generadora de  $G'$ , en  $G$  existen al menos  $n - k$  vértices cuyo grado es estrictamente menor que  $n - k$ . Y por cómo es la sucesión de grados,  $d_{n-k} < n - k$ , lo cual es imposible. Por lo tanto  $G' = Cl(G) = K_n$ , y en consecuencia  $G$  es Hamiltoniana.  $\square$

## 4.4. Ejercicios

1. Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas no triviales y conexas. Encuentra condiciones suficientes y necesarias para que  $G \times H$  sean Eulerianas.

# Capítulo 5

## Apareamientos y factorización

Una de las áreas más interesantes y relevantes de la teoría de las gráficas es la teoría de apareamientos y factorización en gráficas. Los apareamientos y factorizaciones son herramientas que permiten analizar y entender las propiedades estructurales de los grafos, así como aplicarlos en situaciones prácticas de la vida real.

En este capítulo, exploraremos las definiciones de apareamientos y factorizaciones en gráficas, y estudiaremos sus propiedades básicas y características principales. Veremos cómo determinar si una gráfica tiene un apareamiento que contiene a todos los vértices de la gráfica y veremos cómo encontrar un apareamiento máximo utilizando algoritmos eficientes. También analizaremos las propiedades de los apareamientos perfectos, que son aquellos en los que se emparejan todos los vértices del grafo.

Por otra parte, discutiremos el concepto de factorización de grafos, que es un proceso mediante el cual un grafo se descompone en varios subgrafos más simples, llamados factores. Veremos cómo se pueden encontrar factores importantes, como los factores completos y los factores regulares, y cómo se pueden utilizar estos conceptos para estudiar las propiedades estructurales de los grafos

### 5.1. Apareamientos

En esta sección, nos enfocaremos en el concepto de apareamiento o apareamientos en gráficas.

Hay distintos tipos de apareamientos en gráficas, en la siguiente definición mencionamos algunos de ellos.

**Definición 5.1.1.** Sea  $G$  una gráfica. Un subconjunto  $M \subseteq A(G)$  es un *apareamiento* (o *emparejamiento*) de  $G$  si  $M$  no contiene aristas adya-

centes. Si  $M$  es un apareamiento y  $uv \in M$ , se dice que los vértices  $u$  y  $v$  están **saturados** en  $M$ . Un apareamiento  $M$  es un **apareamiento maximal** si no existe un apareamiento  $M'$  tal que  $M \subset M'$ . Un apareamiento  $M$  es un **apareamiento máximo** si no existe un apareamiento  $M'$  tal que  $|M'| > |M|$ . Sea  $A \subseteq V(G)$ , se dice que un apareamiento  $M$  satura a  $A$  si  $M$  **satura** a todo vértice de  $A$ . Si  $M$  satura a  $V(G)$ , entonces decimos que  $M$  es un **apareamiento perfecto**.

Observa que si  $M$  es un apareamiento perfecto con  $|M| = k$  de una gráfica  $G$ , entonces el orden de  $G$  es  $2k$ . Entonces solo las gráficas de orden par pueden tener un emparejamiento perfecto.

Un concepto que ayuda a encontrar un apareamiento máximo es el de trayectorias aumentables, éstas se utilizan para aumentar el tamaño de un emparejamiento conocido hasta llegar a la solución óptima.

**Definición 5.1.2.** Sea  $M$  un apareamiento de  $G$ . Una trayectoria impar  $P = e_1e_2 \dots e_{2k+1}$  es  **$M$ -aumentable** si:

- $P$  alterna entre elementos de  $A(G) \setminus M$  y  $M$ , es decir, para todo  $i$ ,  $e_{2i+1} \in A(G) \setminus M$  y  $e_{2i} \in M$
- Los extremos de  $P$  no están saturados.

Utilizando las trayectorias aumentables Berge da condiciones suficientes y necesarias para determinar si un emparejamiento es máximo o no.

**Teorema 5.1.1** (Berge (1957)). Un apareamiento  $M$  de  $G$  es máximo si y sólo si no existen trayectorias  $M$ -aumentables en  $G$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) (Por contrapositiva) Sea  $M$  un apareamiento que tiene una trayectoria  $M$ -aumentable  $P = e_1e_2 \dots e_{2k+1}$  en  $G$ . Aquí  $e_{2i} \in M$  para todo  $1 \leq i \leq k$  y  $e_{2i+1} \in A(G) \setminus M$  para todo  $0 \leq i \leq k$ . Sea  $N \subseteq A(G)$  definido como:

$$N = (M \setminus \{e_{2i} \mid 1 \leq i \leq k\}) \cup \{e_{2i+1} \mid 0 \leq i \leq k\}.$$

$N$  resulta ser entonces un apareamiento de  $G$  mayor que  $M$ , por lo tanto  $M$  no es un apareamiento máximo.

$\Leftarrow$ ) (Por contradicción) Sea  $M$  un apareamiento para el cual no existen trayectorias  $M$ -aumentables y supongamos que no es máximo. Sea  $N$  un apareamiento máximo de  $G$ . Así,  $|N| > |M|$ .

Considérese la subgráfica  $H = G[M \Delta N]$  a partir de la diferencia simétrica  $M \Delta N$ . Observemos que todo vértice  $v$  de  $H$  tiene grado

a lo más 2 ya que  $v$  es un extremo de a lo más una arista de  $M$  y una de  $N$ . De acuerdo con el lema anterior, toda componente conexa de  $H$ ,  $H_i$ , es o una trayectoria o un ciclo.

Como ningún  $v \in V(A)$  puede ser extremo de dos aristas de  $N$  o dos de  $M$ , cada componente conexa (trayectoria o ciclo)  $H_i$  alterna entre  $N$  y  $M$ . Más aún, al  $|N| > |M|$ , existe una componente conexa  $H_i$  de  $H$  que tiene más aristas de  $N$  que de  $M$ . Esta componente  $H_i$  no puede ser un ciclo, ya que un ciclo alternante tiene longitud par, y por lo tanto mismo número de aristas de  $N$  que de  $M$ . Así,  $H_i : u \xrightarrow{*} v$  es una trayectoria de longitud impar que termina y empieza con una arista de  $N$ . Al ser  $H_i$  una componente conexa de  $H$ , los extremos  $u$  y  $v$  no están saturados por  $M$  y consecuentemente,  $H_i$  es una trayectoria  $M$ -aumentable.  $\diamond$

□

Podemos generalizar la definición de vecindad a un conjunto de vértices.

**Definición 5.1.3.** Sean  $G$  una gráfica y  $S \subseteq V(G)$ . Se le llama **vecindad de  $S$**  al conjunto

$$N_G(S) := \bigcup_{v \in S} N_G(v).$$

Utilizando la definición anterior Hall dió condiciones suficientes y necesarias para que una gráfica bipartita tenga un apareamiento perfecto.

**Definición 5.1.4.** Sea  $G$  una gráfica  $(U, W)$ -partita con  $|U| \leq |W|$ . Se dice que  $G$  satisface la **condición de Hall** si para cualquier  $X \subseteq U$ ,  $|X| \leq |N_G(X)|$ .

**Teorema 5.1.2** (Hall (1935)). Sea  $G$  una gráfica  $(U, W)$ -bipartita. Entonces  $G$  contiene un apareamiento  $M$  que satura a  $U$  si y sólo si  $G$  satisface la condición de Hall.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sean  $M$  un apareamiento que satura a  $U$  y  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  cualquier subconjunto de  $U$ . Por cada elemento  $x_i$  existe una arista  $e_i = x_i y_i \in M$  tal que  $y_i \in N_G(x_i) \subseteq N_G(X)$  y  $y_i \neq y_j$  para todo  $i \neq j$ . Por lo tanto  $|X| \leq |N(X)|$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $H$  la gráfica que resulta al agregar a  $G$  dos vértices nuevos,  $u, w$  tales que  $u$  es adyacente a todo vértice de  $U$  y  $w$  es adyacente a todo vértice de  $W$ . Observemos que existe un apareamiento que satura a  $U$  si y sólo si existen  $|U|$   $(u, w)$ -trayectorias independientes en  $H$ . Para esto, de acuerdo con el teorema de Menger, es suficiente con mostrar que todo

$X \subseteq V(G)$   $(u, w)$ -conjunto de corte en  $H$ , tiene al menos  $|U|$  vértices. Sea  $X$  un  $(u, w)$ -conjunto de corte en  $H$ . Y denotemos con  $A = X \cap U$  y  $B = X \cap W$ . Como  $X$  separa a  $u$  de  $w$ , los vértices de  $U \setminus A$  no son adyacentes a vértices de  $W \setminus B$ , por lo tanto  $N_G(U \setminus A) \subseteq B$ . Así, como  $G$  satisface la condición de Hall,  $|U \setminus A| \leq |N_G(U \setminus A)| \leq |B|$ . Por lo tanto,

$$|U| = |U \setminus A| + |A| \leq |B| + |A| = |X|. \diamond$$

□

Un concepto muy relacionado con el Teorema de Hall es el de los sistemas de representantes.

**Definición 5.1.5.** Sean  $S_1, S_2, \dots, S_n$  conjuntos finitos y no vacíos. Se dice que dicha colección tiene un **sistema de representantes distintos** si existen  $n$  elementos distintos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tales que  $x_i \in S_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .

**Teorema 5.1.3.** Una colección finita  $\{S_1, \dots, S_n\}$  de conjuntos finitos y no vacíos, tiene un sistema de representantes distintos si y sólo si para cualquier entero  $1 \leq k \leq n$ , la unión de cualesquiera  $k$  de estos conjuntos contiene al menos  $k$  elementos.

*Demostración. Tarea*

□

El teorema de representantes y el teorema de Hall se popularizaron porque se pueden reescribir en términos de relaciones sociales heterocentras y patriarcales como el matrimonio.

**Teorema 5.1.4** (Teorema del matrimonio). Si se tiene un grupo de hombres y mujeres en el cual cada mujer conoce a  $k$  de estos hombres y cada hombre conoce a  $k$  de estas mujeres, entonces es posible que cada mujer se case con un hombre que conozca del grupo.

### 5.1.1. Apareamientos perfectos

En ocasiones resolver un problema con una gráfica consiste en encontrar apareamientos en los cuales no queden vértices aislados, es decir, encontrar emparejamientos perfectos.

**Teorema 5.1.5** (Frobenius (1917)). Si  $G$  es una gráfica bipartita  $k$ -regular con  $k > 0$ , entonces  $G$  tiene un apareamiento perfecto.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica  $(U, W)$ -partita y  $k$ -regular. Por la regularidad se tiene que  $k|U| = |A(G)| = k|W|$ , por lo tanto  $|U| = |W|$ .

Sean  $X \subseteq U$ ,  $E_1$  el conjunto de aristas con algún extremo en  $X$  y  $E_2$  el conjunto de aristas con algún extremo en  $N_G(X)$ . Claramente  $E_1 \subseteq E_2$ . Por lo tanto:

$$k|N_G(X)| = |E_2| \geq |E_1| = k|X|$$

Así, de acuerdo con el teorema de Hall,  $G$  contiene un apareamiento que satura a  $X$ ; además, como  $|X| = |Y|$ , este apareamiento es necesariamente perfecto.  $\square$

En general nos podemos preguntar por la cardinalidad del emparejamiento más grande de una gráfica.

**Definición 5.1.6.** Sea  $G$  una gráfica. El **número de independencia por aristas**,  $\alpha'(G)$ , es la cardinalidad de un apareamiento máximo de  $G$ .

De manera que si  $G$  es una gráfica de orden  $n$ , entonces  $\alpha'(G) \leq n/2$ . Además  $\alpha'(G) = n/2$  si y sólo si  $G$  tiene un apareamiento perfecto.

**Definición 5.1.7.** Sean  $G$  una gráfica y  $e = uv \in A(G)$ . Se dice que la arista  $e$  **cubre** a  $u$  (o a  $v$ ) y que  $u$  (o  $v$ ) **cubre** a  $e$ . Sea  $G$  una gráfica sin vértices aislados. Una **cubierta por aristas** de  $G$  es un conjunto de aristas de  $G$  que cubre a todos los vértices de la gráfica. El **número de cubiertas por aristas**,  $\beta'(G)$  de una gráfica  $G$  es la cardinalidad mínima de una cubierta por aristas de  $G$ . Una **cubierta por aristas mínima de  $G$**  es una cubierta de cardinalidad  $\beta'(G)$ .

Existe una relación entre el número de independencia de una gráfica y la cardinalidad de una cubierta mínima.

**Teorema 5.1.6.** [Tibor Gallai] Sea  $G$  una gráfica sin vértices aislados y de orden  $n$ . Entonces,

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = n.$$

*Demostración.* Probaremos primero que  $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq n$  y luego la otra desigualdad para concluir lo deseado.

Sea  $\alpha'(G) = k$ . Así, cualquier apareamiento máximo consta de  $k$  aristas que cubren  $2k$  vértices. El resto de los  $n - 2k$  vértices pueden ser cubiertos por  $n - 2k$  aristas. De manera que  $\beta'(G) \leq k + (n - 2k) = n - k$ . Por lo tanto:

$$\alpha'(G) + \beta'(G) \leq k + n - k = n.$$

Ahora, sean  $X$  una cubierta mínima por aristas de  $G$  y  $l := \beta'(G)$ . Entonces  $|X| = l$ .

Considérese la subgráfica  $F := G[X]$ . Observemos que  $F$  no contiene paseos de longitud 3, de lo contrario la arista de en medio sobraría. En consecuencia,  $F$  no contiene ni ciclos ni trayectorias de longitud mayor o igual a tres. Esto implica que toda componente conexa de  $F$  es una estrella.

Como un bosque de orden  $n$  y tamaño  $n - k$  contiene  $k$  componentes conexas y el tamaño de  $F$  es  $l = n - (n - l)$ ,  $F$  contiene  $(n - l)$  componentes conexas no triviales (puesto que no hay vértices aislados).

Si se selecciona una arista de cada una de estas componentes conexas de  $F$ , se tiene un apareamiento de cardinalidad  $n - l$ , esto es,  $\alpha'(G) \geq n - l$ . Por lo tanto

$$\alpha'(G) + \beta'(G) \geq (n - l) + l = n.$$

Y con esto concluimos finalmente lo deseado.  $\square$

También podemos definir los conjuntos independientes para vértices.

**Definición 5.1.8.** Un conjunto de vértices de una gráfica  $G$  es *independiente* si ningún par de vértices en el conjunto están conectados. El *número de independencia*,  $\alpha(G)$  de una gráfica  $G$ , es la cardinalidad máxima de un conjunto de vértices independiente. Un *conjunto de independencia máximo* de  $G$  es un conjunto independiente de  $G$  de cardinalidad  $\alpha(G)$ .

También existe el concepto de cubierta para vértices.

**Definición 5.1.9.** Una *cubierta* en una gráfica  $G$  es un conjunto de vértices que cubre a todas las aristas de  $G$ . El mínimo número de vértices en una cubierta por vértices de  $G$  es el *número de cubierta por vértices* en  $G$ ,  $\beta(G)$ .

Y el resultado análogo al teorema 5.1.6.

**Teorema 5.1.7.** Para toda gráfica  $G$  de orden  $n$  sin vértices aislados,

$$\alpha(G) + \beta(G) = n.$$

*Demostración. Tarea*  $\square$

El número de independencia ayuda a encontrar propiedades que cumple la gráfica, por ejemplo tener un número de independencia “pequeño” hace que la gráfica sea Hamiltoniana.

**Teorema 5.1.8.** Sea  $G$  una gráfica de orden al menos 3. Si  $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ , entonces  $G$  es Hamiltoniana.

*Demostración.* Si  $\alpha(G) = 1$  entonces  $G$  es completa y por lo tanto Hamiltoniana.

Supongamos entonces que  $\alpha(G) = k \geq 2$ . Como  $\kappa(G) \geq 2$ ,  $G$  es 2-conexa y en consecuencia, de acuerdo con el teorema de Menger,  $G$  contiene un ciclo. Dentro de todos los ciclos de  $G$ , sea  $C$  uno del mayor tamaño posible. A consecuencia del teorema de Dirac,  $C$  contiene al menos  $k$  vértices. Veamos que  $C$  es un ciclo Hamiltoniano. Para esto, asumamos lo contrario, es decir, que existe  $w \in V(G)$  que no pertenece a  $C$ . Luego, como  $G$  es  $k$ -conexa y  $|V(C)| \geq k$ , en virtud del lema del ventilador,  $G$  contiene  $k$  trayectorias  $P_1, \dots, P_k$  internamente ajenas tales que  $P_i$  es una  $(w, v_i)$ -trayectoria donde  $v_i$  es el único vértice de  $P_i$  en  $C$  y  $v_i \neq v_j$  para cualesquiera  $i \neq j$ .

Para algún orden en los vértices de  $C$ , sea  $u_i$  el vértice que sigue de  $v_i$  en  $C$  para cada  $1 \leq i \leq k$ . Notemos que para cualquier  $1 \leq i \leq k$ ,  $u_i w \notin A(G)$ , de lo contrario, al reemplazar la arista  $v_i u_i$  por  $P_i$  y  $w u_i$  se obtiene un ciclo cuya longitud es mayor que la de  $C$ .

Sea  $S = \{w, u_1, u_2, \dots, u_k\}$ . Como  $|S| = k + 1 > \alpha(G)$  y  $w u_i \notin A(G)$  para cada  $1 \leq i \leq k$ , existen enteros distintos  $r$  y  $s$  tales que  $1 \leq r, s \leq k$  y  $u_r u_s \in A(G)$ . Al reemplazar las aristas  $v_r u_r$  y  $v_s u_s$  por la arista  $u_r u_s$  y las trayectorias  $P_r$  y  $P_s$  se obtiene un ciclo mayor a  $C$ , lo cual es imposible. Por lo tanto  $C$  es un ciclo Hamiltoniano.  $\square$

**Definición 5.1.10.** Se dice que una componente conexa de una gráfica es *impar* si su orden es impar; y es *par* si su orden es par. Denotemos con  $c_o(G)$  al número de componentes impares en una gráfica  $G$ .

**Teorema 5.1.9** (Fórmula de Tutte y Berge). Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ , entonces:

$$\alpha'(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2}.$$

*Demostración.* Observemos que basta con probar este hecho para gráficas conexas ya que si  $G_1, G_2, \dots, G_k$  son las componentes conexas de  $G$ , entonces

$$\alpha'(G) = \sum_{i=1}^k \alpha'(G_i).$$

Sean entonces  $G$  una gráfica conexa de orden  $n$  y  $S \subseteq V(G)$ .

Primero observemos que  $\alpha'(G) - |S| \leq \alpha'(G - S)$ , esto ya que si  $M$  es un apareamiento máximo de  $G$ , i.e.  $|M| = \alpha'(G)$ ,  $M' := M \cap A(G - S)$  es un apareamiento de  $G - S$ , y  $M'$  tiene al menos  $\alpha'(G) - |S|$  aristas, ya que a lo más cada vértice de  $S$  pertenece a una arista distinta de  $M$ . Por lo tanto,  $\alpha'(G) - |S| \leq \alpha'(G - S)$ .

Así,

$$\alpha'(G) \leq |S| + \alpha'(G - S) \leq |S| + \frac{|V(G) \setminus S| - c_o(G - S)}{2} = \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2}.$$

La segunda desigualdad se debe a que cada componente impar de  $G - S$  tiene al menos un vértice no saturado y a lo más el resto saturados por parejas.

Por lo tanto,

$$\alpha'(G) \leq \min_{S \subseteq V(G)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2}.$$

Ahora probemos que  $\alpha'(G) \geq \min_{S \subseteq V(G)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2}$ . Lo cual haremos por inducción sobre el orden de  $G$ .

Si  $n = 1$ ,  $\min_{S \subseteq V(G)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2} = 0 = \alpha'(G)$ . Sea  $n \geq 2$  y supongamos que para toda gráfica de orden  $n - 1$  la afirmación es válida. Tenemos dos casos posibles:

Caso I) Existe  $v \in V(G)$  saturado por cualquier apareamiento máximo de  $G$ .

Entonces,  $\alpha'(G - v) = \alpha'(G) - 1$ . Para  $S' \subseteq V(G - v)$ , denotemos con  $S = S' \cup \{v\}$ . De acuerdo con la hipótesis de inducción, para todo  $S' \subseteq V(G - v)$ :

$$\begin{aligned} \alpha'(G) - 1 = \alpha'(G - v) &\geq \min_{S' \subseteq V(G - v)} \frac{(n - 1) + |S'| - c_o((G - v) - S')}{2} \\ &= \min_{S' \subseteq V(G - v)} \frac{(n - 1) + |S'| - c_o(G - S)}{2} \\ &= \min_{S' \subseteq V(G - v)} \frac{((n - 1) + 1) + (|S'| + 1) - 2 - c_o(G - S)}{2} \\ &= \min_{S' \subseteq V(G - v)} \frac{n + |S| - 2 - c_o(G - S)}{2} \\ &= \min_{S' \subseteq V(G - v)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2} - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $V(G - v) \subseteq V(G)$ ,

$$\alpha'(G) \geq \min_{S' \subseteq V(G - v)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2} \geq \min_{S \subseteq V(G)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2}$$

Caso II) Supongamos que para cada vértice  $v$  existe un apareamiento máximo que no satura a  $v$ . Afirmamos que en este caso  $\alpha'(G) = (n - 1)/2$ , es decir, para cada apareamiento máximo  $M$  sólo hay un vértice no saturado por éste.

Supongamos lo contrario, es decir, que para todo apareamiento máximo hay al menos dos vértices no saturados por éste. Para cada apareamiento máximo  $N$  definamos

$$d_N^n = \min\{d_G(u, v); u \text{ y } v \text{ no están saturados por } N\}.$$

Sea entonces  $M$  un apareamiento máximo tal que para cualquier otro apareamiento máximo  $N$ ,  $d_M^{in} \leq d_N^{in}$  y sean  $u, v \in V(G)$  dos vértices distintos  $M$ -insaturados tales que  $d_G(u, v) = d_M^{in}$ . Es decir,  $M$  es un apareamiento máximo que contiene dos vértices distintos no saturados  $u$  y  $v$  con la menor distancia dentro de todos los vértices no saturados de cada apareamiento máximo.

Observación:  $d_G(u, v) \geq 2$ , de lo contrario, si  $uv \in A(G)$ ,  $M \cup \{uv\}$  es un apareamiento mayor que  $M$ , en contradicción con su maximalidad.

Sea  $w$  el vértice que sigue de  $u$  en una  $(u, v)$ -geodésica. De acuerdo con la hipótesis, existe al menos un apareamiento máximo que no satura a  $w$ . Dentro de estos, sea  $N$  un apareamiento máximo que no satura a  $w$  y tal que  $M \cap N$  sea maximal.

Como  $d_G(u, w) < d_G(u, v)$  y  $d_G(w, v) < d_G(u, v)$  y en virtud de la elección de  $M$ ,  $N$  satura tanto a  $u$  como a  $v$  y  $M$  satura a  $w$ .

Por otro lado, al  $M$  y  $N$  ser apareamientos máximos, dejan insaturados el mismo número de vértices. De manera que existe otro vértice  $x \neq w$  que no está saturado por  $N$ , pero sí está saturado por  $M$ .

Sea  $e = xy \in M$ . Observemos que  $y$  tiene que estar saturado por  $N$ , de lo contrario  $N \cup \{e\}$  sería un apareamiento, en contradicción con la maximalidad de  $N$ . En consecuencia,  $y \neq w$ . De manera que existe una arista  $e' = yz \in N$ , con  $z \neq x$ . Pero en dicho caso  $N' = N \cup \{e\} \setminus \{e'\}$  es un apareamiento máximo que no satura a  $w$ , además,  $N \cap M \subset N' \cap M$ , en contradicción con la elección de  $N$ .

Por lo tanto, todo apareamiento máximo deja exactamente un vértice sin saturar, i.e.  $\alpha'(G) = \frac{n-1}{2}$ . Lo cual implica que el orden de  $G$  es impar, en consecuencia, en este caso, si consideramos  $S = \emptyset$  se tiene que:

$$\min_{S \subseteq V(G)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2} \leq \frac{n - c_o(G)}{2} = \frac{n - 1}{2} = \alpha'(G).$$

Por lo tanto,  $\alpha'(G) \geq \min_{S \subseteq V(G)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2}$ .

Así, en cualquier caso se tiene la doble desigualdad y en consecuencia

$$\alpha'(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \frac{n + |S| - c_o(G - S)}{2} \quad \diamond$$

□

Como corolario se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 5.1.10** (Tutte (1947)). Sea  $G$  una gráfica no trivial.  $G$  tiene un apareamiento perfecto si y sólo si para todo  $S \subset V(G)$ ,  $c_o(G - S) \leq |S|$ .

*Demostración.* (Prueba de tarea) □

**Teorema 5.1.11** (Petersen (1891)). Si  $G$  es una gráfica 3-regular y sin puentes, entonces  $G$  tiene un apareamiento perfecto.

*Demostración.* Sea  $S \subset V(G)$  y sean  $G_1, G_2, \dots, G_k$  las componentes conexas impares de  $G - S$ , de manera que  $c_o(G - S) = k$ . Denotemos con  $n_i$  y  $m_i$  el orden y tamaño de  $G_i$ , respectivamente, y con  $s_i$  el número de aristas con un extremo en  $G_i$  y otro en  $S$ .

Como  $G$  es 3-regular:

$$\sum_{v \in V(G_i)} d_G(v) = 3n_i \quad \text{y} \quad \sum_{v \in S} d_G(v) = 3|S|$$

De manera que:

$$s_i = \sum_{v \in V(G_i)} d_G(v) - \sum_{v \in V(G_i)} d_{G_i}(v) = 3n_i - 2m_i$$

Así, como cada  $n_i$  es impar,  $s_i$  es impar. Además, al  $G$  no tener puentes,  $s_i \neq 1$ , en consecuencia  $s_i \geq 2$  para toda  $1 \leq i \leq k$ . De acuerdo con estas dos últimas observaciones para toda  $1 \leq i \leq k$ ,  $s_i \geq 3$ . Por lo tanto,  $3k \leq \sum_{i=1}^k s_i$  y en consecuencia el número de componentes impares de  $G - S$  satisface:

$$k \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k s_i \leq \frac{1}{3} \sum_{v \in S} d_G(v) = |S|$$

La segunda desigualdad se obtiene del hecho de que en  $\sum_{v \in S} d_G(v)$  se están contando todas las aristas de  $G$  con algún extremo en  $S$  mientras que en  $\sum_{i=1}^k s_i$  sólo las aristas con un extremo en  $S$  y otro en algunas de las componentes  $G_i$ .

En consecuencia, en virtud del teorema 5.1.10,  $G$  tiene un apareamiento perfecto. □

### 5.1.2. Factorización

A veces nos interesa descomponer una gráfica en términos de subgráficas generadoras para este tipo de problemas surge el concepto de factor.

**Definición 5.1.11.** Un **1-factor** de una gráfica  $G$  es una subgráfica generadora 1-regular de  $G$ . Se dice que una gráfica  $G$  es **1-factorizable** si existen 1-factores  $F_1, F_2, \dots, F_r$  de  $G$  tales que  $\{A(F_1), \dots, A(F_r)\}$  es una partición de  $A(G)$ . En este caso se dice que  $G$  está factorizada en los 1-factores,  $F_1, F_2, \dots, F_r$  que forman una 1-factorización de  $G$ .

**Teorema 5.1.12.** La gráfica de Petersen no es 1-factorizable.

*Demostración.* Supongamos lo contrario, que la gráfica de Petersen, que denotaremos con  $PG$ , es 1-factorizable. Sean  $F_1, F_2, F_3$ , 1-factores de  $PG$  en una 1-factorización de  $PG$ . Así, la subgráfica generadora  $H$  de  $PG$  con  $A(H) = A(F_1) \cup A(F_2)$  es una subgráfica generadora de  $PG$  y 2-regular, por lo tanto  $H$  es o un ciclo o unión de ciclos.

$PG$  no es Hamiltoniana, entonces  $H$  no puede ser un único ciclo. Por otro lado, como la longitud del ciclo más pequeño de  $PG$  es 5,  $H = 2C_5$ . Lo cual es imposible ya que  $2C_5$  no tiene apareamientos perfectos, es decir, no contiene un 1-factor.  $\square$

**Teorema 5.1.13.** Para todo entero  $k \geq 1$ , la gráfica  $K_{2k}$  es 1-factorizable.

*Demostración.* Como el resultado es claro para  $k = 1$  y  $k = 2$ , asumamos que  $k \geq 3$ .

Sea  $G = K_{2k}$ , donde  $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2k-1}\}$ . Sean  $v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}$  los vértices de un  $(2k-1)$ -ágono regular y colóquese  $v_0$  en el centro del  $(2k-1)$ -ágono. Dibújese cada arista de  $G$  con un segmento de recta. Sea  $F_1$  el 1-factor de  $G$  que consista de la arista  $v_0v_1$  junto con las aristas de  $G$  perpendiculares a ésta. En general, para  $1 \leq i \leq 2k-1$ , sea  $F_i$  el 1-factor de  $G$  que consiste en la arista  $v_0v_i$  junto con todas las aristas de  $G$  perpendiculares a  $v_0v_i$ . Entonces,  $G$  tiene una factorización en los 1-factores  $F_1, F_2, \dots, F_{2k-1}$ .  $\square$

En la factorización de  $K_{2k}$  descrita en la prueba del teorema anterior, el 1-factor  $F_2$  se puede obtener al rotar el 1-factor  $F_1$  con el sentido de las manecillas del reloj en un ángulo de  $2\pi/(2k-1)$  radianes. Al rotar  $F_1$  en este ángulo dos veces, se obtiene  $F_3$  y así sucesivamente hasta obtener  $2k-1$  factores.

El teorema de Frobenius (asociado al teorema del matrimonio) afirma que toda gráfica bipartita  $k$ -regular (con  $k > 0$ ) tiene un apareamiento perfecto. Esto, en términos de 1-factores se traduce en que toda gráfica bipartita  $k$ -regular (con  $k > 0$ ) tiene un 1-factor. Observemos que si  $G$  es una gráfica bipartita  $k$ -regular (con  $k > 0$ ) y  $F_1$  un 1-factor de ésta, entonces  $G_1 = G - A(F_1)$ , la gráfica que resulta de quitarle a  $G$  todas las aristas de  $F_1$ , es una gráfica  $(k-1)$ -regular, de manera que si  $k > 1$ ,  $G_1$  también tiene un 1-factor. Procediendo de este modo hasta llegar a una gráfica trivial, podemos concluir lo siguiente.

**Teorema 5.1.14.** Sea  $k \geq 1$ . Si  $G$  es una gráfica bipartita  $k$ -regular, entonces  $G$  es 1-factorizable.

**Definición 5.1.12.** Un 2-factor en una gráfica  $G$  es una subgráfica generadora 2-regular de  $G$ . Se dice que una gráfica  $G$  es 2-factorizable si existen 2-factores  $F_1, F_2, \dots, F_k$  tales que  $\{A(F_1), \dots, A(F_k)\}$  es una partición de  $A(G)$ .

El siguiente teorema nos dice cuando una gráfica se puede descomponer en ciclos ajenos en aristas.

**Teorema 5.1.15.** Una gráfica  $G$  es 2-factorizable si y sólo si  $G$  es  $r$ -regular, con  $r$  un número par.

*Demostración.* Si  $F_1, F_2, \dots, F_k$  son los  $k$ -factores de una 2-factorización de  $G$ , entonces cada  $F_i$  es una gráfica 2 regular, de manera que  $G$  es  $2k$ -regular, concluyendo lo deseado.

Ahora, supongamos que  $G$  es  $r$ -regular, donde  $r = 2k$  y  $k \geq 1$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $G$  es conexa. Así, de acuerdo con lo visto anteriormente,  $G$  es Euleriana y por lo tanto contiene un circuito Euleriano al cual denotaremos por  $C$ .

Observemos que cada vértice de  $G$  aparece  $k$  veces en  $C$ .

Sea  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Construimos una gráfica bipartita  $H$  con partes:

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ y } W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\},$$

donde los vértices  $u_i$  y  $w_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) son adyacentes en  $H$  si  $v_j$  es el vértice que sigue inmediatamente después del vértice  $v_i$  en  $C$ . Como cada vértice de  $G$  aparece exactamente  $k$  veces en  $C$ , la gráfica  $H$  es  $k$ -regular. Así, de acuerdo con el teorema anterior (5.1.14),  $H$  es 1-factorizable y por tanto puede factorizarse en  $k$  1-factores  $F'_1, F'_2, \dots, F'_k$ .

Veamos que cada 1-factor  $F'_i$  (con  $1 \leq i \leq k$ ) de  $H$  corresponde a un 2-factor  $F_i$  de  $G$ . Para esto, considérese, por ejemplo, el 1-factor  $F'_i$  de  $H$ . Como  $F'_i$  es un apareamiento perfecto de  $H$ ,  $A(F'_i)$  es un conjunto independiente de  $k$  aristas de  $H$ , digamos:

$$A(F'_i) = \{u_1 w_{i_1}, u_2 w_{i_2}, \dots, u_n w_{i_n}\},$$

donde  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $i_j \neq j$  para toda  $j$ , con  $1 \leq j \leq n$ .

Sea  $i_t = i$ . Entonces, el 1-factor  $F'_i$  da lugar a un ciclo

$$C^{(1)} = (v_i, v_{i_1}, \dots, v_t, v_{i_t} = v_i).$$

Si  $C^{(1)}$  tiene longitud  $n$ , entonces  $C^{(1)}$  es un ciclo Hamiltoniano de  $G$  y por tanto, un 2-factor de ésta.

Si la longitud de  $C^{(1)}$  es menor que  $n$ , entonces existe un vértice  $v_l$  en  $G$  que no está en  $C^{(1)}$ . Supongamos que  $i_s = l$ . Esto da lugar a un segundo ciclo

$$C^{(2)} = (v_l, v_{i_l}, \dots, v_{i_s} = v_l).$$

Continuando con este procedimiento obtenemos una colección de ciclos internamente ajenos por parejas que en total contienen a cada vértice de  $G$  una sola vez, lo cual produce un 2-factor  $F_1$  de  $G$ .

Entonces, en general la 1-factorización de  $H$  en 1-factores  $F'_1, F'_2, \dots, F'_k$  induce una 2-factorización de  $G$  en 2-factores  $F_1, F_2, \dots, F_k$  como se deseaba.  $\square$

**Definición 5.1.13.** Una **factorización Hamiltoniana** de una gráfica  $G$  es una 2-factorización de  $G$  en la cual cada 2-factor es un ciclo Hamiltoniano. Una gráfica  $G$  es **Hamiltonianamente factorizable** si existe una factorización Hamiltoniana de  $G$ .

**Teorema 5.1.16.** Para todo entero  $k \geq 1$ , la gráfica completa  $K_{2k+1}$  es Hamiltonianamente factorizable.

*Demostración.* Como el teorema es claramente verdadero para  $1 \leq k \leq 3$ , supongamos que  $k \geq 4$ . Sea  $G = K_{2k+1}$  y  $H = K_{2k}$ , con  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k}\}$  y sea  $V(G) = V(H) \cup \{v_0\}$ . Sean los vértices de  $H$  los vértices de un  $2k$ -ágono regular y sean las aristas de  $H$  segmentos de líneas rectas. Un ciclo Hamiltoniano  $C$  de  $G$  se construye a partir de una trayectoria Hamiltoniana  $P$  de  $H$  que empieza en  $v_1, v_2, v_{2k}, v_3, v_{2k-1}$  y después continúa en este patrón zig-zag hasta llegar al vértice  $v_{k+1}$ . La trayectoria  $P$  es una  $(v_1, v_{k+1})$ -trayectoria cuyos vértices son aquellos paralelos a  $v_1v_2$  o  $v_2v_{2k}$ . El ciclo  $C$  en  $G$  se completa al colocar a  $v_0$  en algún lugar conceniente dentro del  $2k$ -ágono regular y unir  $v_0$  a  $v_1$  y  $v_{k+1}$ .  $\square$

**Definición 5.1.14.** Un **factor** de  $G$  es una subgráfica generadora  $F$  de  $G$ . En este caso se dice que  $G$  es factorizable en los factores  $F_1, F_2, \dots, F_k$  si  $\{A(F_1), A(F_2), \dots, A(F_k)\}$  es una partición de  $A(G)$ . Si cada factor  $F_i$  es isomorfo a alguna gráfica  $F$ , entonces se dice que  $G$  es  **$F$ -factorizable**.

También las completas de orden par se pueden ver como la unión de ciclos hamiltonianos ajenos en aristas.

**Teorema 5.1.17.** Para todo entero  $k \geq 1$ , la gráfica completa  $K_{2k}$  puede ser factorizada en  $(k - 1)$  ciclos Hamiltonianos y un 1-factor.

*Demostración.* Como el resultado es inmediato para  $k = 1$  y  $k = 2$ , supongamos entonces que  $k \geq 3$ . Sea  $G = K_{2k}$ , con  $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2k-1}\}$ .

Sean  $v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}$  los vértices de un  $(2k-1)$ -ágono regular y colóquese  $v_0$  en el centro de dicho  $(2k-1)$ -ágono. Unan cada dos vértices de  $G$  por un segmento de recta. Sea  $G_1$  la subgráfica generadora de  $G$  cuyas aristas consiste de (1)  $v_0v_1$  y  $v_0v_{k+1}$ , (2) todas las aristas paralelas a  $v_0v_{k+1}$ . Entonces  $G_1 = G_{2k}$ . Para  $1 \leq i \leq k-1$ , sea  $G_i$  la subgráfica generadora de  $G$  cuyas aristas consisten de (1)  $v_0v_i$  y  $v_0v_{k+i}$ , (2) todas las aristas paralelas a  $v_0v_i$  y (3) todas las aristas paralelas a  $v_0v_{k+i}$ . Entonces  $G_i = C_{2k}$  para cada  $1 \leq i \leq k-1$  y toda arista de  $G$  pertenece a alguna subgráfica  $G_i$  (con  $1 \leq i \leq k-1$ ) excepto las aristas  $v_1v_{2k-1}, v_2v_{2k-2}, \dots, v_{k-1}v_{k+1}$  y  $v_0v_k$ , que son las aristas de un 1-factor  $G_k$  de  $G$ . Por lo tanto  $G$  puede ser factorizada en  $G_1, G_2, \dots, G_k$ .  $\square$

## 5.2. Ejercicios

1. Probar que  $K_9$  es  $3K_3$ -factorizable, dando una  $3K_3$ -factorización de  $K_9$ .

# Capítulo 6

## Planaridad

Mencionamos al inicio de este libro que una gráfica puede ser representada a través de un dibujo en una hoja de papel. Sin embargo, estas representaciones no son únicas, además puede haber propiedades de una gráfica que son más fáciles de observar en un cierto dibujo. En éste capítulo estudiaremos a las gráficas planas.

Una **gráfica plana** o **planar** es una gráfica que puede ser dibujada en el plano de manera que ningún par de aristas se intersequen. Estas gráficas son utilizadas en el diseño de circuitos eléctricos, donde uno intenta evitar los cruces entre alambres o rayos láser.

**Definición 6.0.1.** Se dice que una gráfica  $G$  es **planar** si tiene una representación plana  $P(G)$ , llamada encaje plano de  $G$ , donde las líneas (o curvas continuas) que corresponden a las aristas de  $G$ , no se intersecan entre sí, excepto en sus extremos.

Una gráfica  $G$  es **plana** si está dibujada en el plano de modo que ningún par de aristas se crucen.

### 6.0.1. Propiedades geométricas

Es claro que las propiedades que cumple una gráfica  $G$  son inherentes a todos sus encajes planos (dibujos). Por ejemplo, la manera en que se dibuja en el plano una gráfica  $G$  no cambia su grado máximo, ni su diámetro ni su índice cromático por aristas.

Recordemos algunos elementos de la geometría del plano. Por una **curva** entenderemos la imagen continua de un segmento de línea. Análogamente, una **curva cerrada** es la imagen continua de un círculo. Una **curva**, o curva cerrada es **simple** si no se interseca a sí misma (en otras palabras, si la función es inyectiva). Sea  $F \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , se dice que  $F$  es un **conjunto abierto**

del plano si para todo  $x \in F$  existe un disco con centro en  $x$  completamente contenido en  $F$ . Un conjunto abierto  $F$  es **conexo por trayectorias** si para cualquier par de puntos en  $F$ , existe una curva continua en  $F$  que los une. A los conjuntos conexos por trayectorias también se les llama **regiones**. La **frontera**  $\partial(F)$  de una región  $F$  consiste en aquellos puntos para los cuales toda vecindad contiene puntos de  $F$  y de su complemento.

Sea  $G$  una gráfica planar y  $P(G)$  uno de sus encajes planos. Consideremos ahora cada arista  $e = uv \in G$  como una línea de  $u$  a  $v$ . El conjunto  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A(G)$  es abierto y está dividido en un número finito de regiones, llamadas las **caras** de  $P(G)$ .

**Definición 6.0.2.** Una cara de  $P(G)$  es una **cara interior** si está acotada. A la única cara que no está acotada se le llama **cara exterior** de  $P(G)$ . Las aristas que rodean una cara  $F$  constituyen la frontera  $\partial(F)$  de  $F$ . La **frontera exterior** es la frontera de la cara exterior. Los vértices (aristas, respectivamente) en la frontera exterior son llamadas **vértices exteriores** (**aristas exteriores**, resp.). Vértices (aristas, resp.) que no están en la frontera exterior son **vértices interiores** (**aristas interiores**, resp.).

Un resultado particularmente importante y que nos será de utilidad es el siguiente.

**Teorema 6.0.1** (Teorema de la curva de Jordan). Cualquier curva simple cerrada en el plano forma una partición del resto del plano en dos conjuntos disjuntos abiertos y conexos por trayectorias.

Aunque este teorema sea intuitivamente obvio, su prueba formal no es tan sencilla y por no ser parte del objetivo de este texto no la incluimos aquí.

A los dos conjuntos abiertos en los cuales una curva cerrada simple  $C$  dividen el plano se les llama **interior** y **exterior** de  $C$  los cuales se denotan con  $int(C)$  y  $ext(C)$ , respectivamente. El teorema de la curva de Jordan implica que todo arco que una un punto de  $int(C)$  con un punto de  $ext(C)$  debe intersectar a  $C$  en al menos un punto.

Una consecuencia del teorema de Jordan es por ejemplo el hecho de que  $K_5$  no es planar.

**Teorema 6.0.2.** La gráfica completa  $K_5$  no es planar.

*Demostración.* Haremos la demostración por contradicción. Sea  $G$  un encaje plano de  $K_5$ , con vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ . Como  $G$  es completa, cualesquiera dos vértices están unidos por una arista. Ahora, el ciclo  $C = (v_1, v_2, v_3, v_1)$  es una curva cerrada simple en el plano y el vértice  $v_4$  tiene que caer ya sea en  $int(C)$  o en  $ext(C)$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $v_4 \in int(C)$ .

Entonces, las aristas  $v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4$  están también todas completamente contenidas en  $int(C)$ .

Considérese los ciclos  $C_1 = (v_2, v_3, v_4, v_2)$ ,  $C_2 = (v_3, v_1, v_4, v_3)$  y  $C_3 = (v_1, v_2, v_4, v_1)$ . Observemos que  $v_i \in ext(C_i)$ , para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Para  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $v_iv_5 \in A(G)$  y  $G$  es una gráfica plana, así, de acuerdo con el teorema de la curva de Jordan, para cada  $1 \leq i \leq 3$ ,  $v_5 \in ext(C_i)$ . Por lo tanto  $v_5 \in ext(C)$ . Pero, nuevamente en virtud del teorema de la curva de Jordan, la arista  $v_4v_5$  cruza a  $C$ , lo cual contradice la planaridad del encaje  $G$ .  $\diamond$

Utilizando que una gráfica es plana si y sólo si toda subgráfica es plana, obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 6.0.1.** Toda gráfica completa  $K_n$  de orden  $n \geq 5$  no es planar.

A continuación enunciamos varias propiedades que satisfacen los encajes de una gráfica planar, y que aceptaremos como válidas.

**Lema 6.0.1.** Sea  $P(G)$  un encaje en el plano de una gráfica planar  $G$ .

1. Dos caras distintas  $F_1, F_2$  son ajenas y sus fronteras pueden llegar a intersectarse únicamente en aristas.
2.  $P(G)$  tiene una única cara exterior.
3. Cada arista  $e$  pertenece a la frontera de a lo más dos caras.
4. Cada ciclo de  $G$  rodea (es decir, su interior contiene) al menos una cara interna de  $P(G)$ .
5. Un puente de  $G$  pertenece a la frontera de únicamente una cara.
6. Una arista que no es puente pertenece a la frontera de exactamente dos caras.

Si  $P(G)$  es un encaje plano de una gráfica  $G$ , entonces también lo es cualquier dibujo  $P'(G)$  que se obtiene de  $P(G)$  por medio de una función inyectiva del plano que preserva curvas continuas. Esto significa, en particular, que toda gráfica planar tiene un encaje plano dentro de cualquier círculo geométrico de radio arbitrariamente pequeño, o dentro de cualquier triángulo.

**Lema 6.0.2.** Un encaje plano  $P(G)$  de una gráfica planar  $G$  no tiene caras interiores si y sólo si  $G$  es acíclica, es decir, si y sólo si  $G$  es un bosque.

### 6.0.2. Identidad de Euler

El siguiente resultado es conocido como la identidad de Euler, la cual establece una relación entre los vértices, las aristas y las caras de una gráfica plana.

**Teorema 6.0.3** (Identidad de Euler). Sea  $G$  una gráfica conexa y plana de orden  $n$ , tamaño  $m$  y con  $c$  caras, entonces

$$n - m + c = 2$$

*Demostración.* La demostración la haremos por inducción sobre el tamaño  $m$  de una gráfica plana y conexa. Si  $m = 0$ , entonces la única gráfica conexa de tamaño 0 es  $K_1$ . En este caso,  $n = 1$ ,  $m = 0$  y  $c = 1$ . Como  $n - m + c = 2$ , se tiene la base inductiva.

Asumamos entonces que para un entero positivo  $m$ , si  $H$  es una gráfica plana conexa de orden  $n'$ , tamaño  $m'$ , con  $m' < m$  en la cual hay  $c'$  caras, entonces  $n' - m' + c' = 2$ . Sea  $G$  una gráfica conexa y plana de orden  $n$ , tamaño  $m$  y con  $c$  caras. Se tienen dos casos posibles:

**Caso I** *Si  $G$  es un árbol.* En este caso,  $m = n - 1$  y  $c = 1$  (sólo tiene la cara exterior). Por lo tanto  $n - m + c = n - (n - 1) + 1 = 2$ , como se deseaba.

**Caso II** *Si  $G$  no es un árbol.* Si  $G$  no es un árbol, como es conexa,  $G$  contiene una arista  $e$  que no es un puente. En  $G$  dicha arista pertenece a la frontera de exactamente dos caras. Por tanto, en  $G - e$  estas dos caras forman una misma cara. Como  $G - e$  tiene tamaño  $m - 1$ , orden  $n$  y  $c - 1$  caras, de acuerdo con la hipótesis de inducción,  $n - (m - 1) + (c - 1) = 2$ , en consecuencia  $n - m + c = 2$ .  $\diamond$

□

La identidad de Euler tiene muchas consecuencias interesantes. Por ejemplo, como corolario inmediato se tiene que si  $G$  es una gráfica planar, entonces todo encaje de ésta en el plano, tiene el mismo número de caras. Otra de estas consecuencias es que para que una gráfica sea planar, no puede tener demasiadas aristas, es decir, se tiene una cota en el número de aristas de una gráfica planar. Esto permite demostrar de manera sencilla la no planaridad de ciertas gráficas.

**Teorema 6.0.4.** Si  $G$  es una gráfica plana de orden  $n \geq 3$  y tamaño  $m$ , entonces

$$m \leq 3n - 6.$$

*Demostración.* Notemos que basta con probar la afirmación para gráficas conexas ya que si  $G$  es desconexa, con  $k$  componentes conexas,  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Como  $G$  es planar, cada componente conexa lo es y, de acuerdo con la afirmación,  $m_i \leq 3n_i - 6$ , donde  $m_i$  y  $n_i$  son el tamaño y el orden de  $G_i$ , respectivamente (para cada  $1 \leq i \leq k$ ). Por tanto

$$m = \sum_{i=1}^k m_i \leq \sum_{i=1}^k (3n_i - 6) = 3 \sum_{i=1}^k n_i - 6k = 3n - 6k \leq 3n - 6.$$

Por lo tanto,  $m \leq 3n - 6$ .

Supongamos entonces que  $G$  es conexa. Notemos que si  $m \leq 2$ , entonces es claro que  $m \leq 3n - 6$  ya que si  $m \leq 2$ , como  $n \geq 3$  y  $G$  es conexa,  $m = 2$  y  $n = 3$ , por lo tanto

$$m = 2 \leq 3 = 3n - 6.$$

Supongamos entonces que  $m \geq 3$ . Cada cara  $F$  de  $G$  contiene al menos 3 aristas en su frontera  $\partial(F)$ . Por lo tanto,  $3c \leq 2m$ , ya que cada arista pertenece a la frontera de a lo más dos caras. Así, de acuerdo con la identidad de Euler:

$$\begin{aligned} n + c - m &= 2 \\ m &= n + c - 2 \\ 3m &= 3n + 3c - 6 \leq 3n + 2m - 6 \\ m &\leq 3n - 6 \quad \diamond \end{aligned}$$

□

**Corolario 6.0.2.** Si  $G$  es una gráfica planar de orden  $n \geq 3$ , tamaño  $m$  y que no contiene ciclos de orden 3, entonces  $m \leq 2n - 4$ .

(Demostrar de tarea)

**Corolario 6.0.3** (Heawood (1890)). Toda gráfica planar contiene un vértice de grado menor o igual a cinco, es decir, si  $G$  es una gráfica planar, entonces  $\delta(G) \leq 5$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ , tamaño  $m$  y tal que  $\delta(G) \geq 6$ . Claramente  $n \geq 7$ . Entonces:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) \geq 6n,$$

en consecuencia,

$$m \geq 3n > 3n - 6,$$

por lo tanto, en virtud del teorema 6.0.4,  $G$  no es planar. □

**Teorema 6.0.5.** Las gráficas  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son planares.

*Demostración.* De acuerdo con el corolario 6.0.4, una gráfica planar de orden 5 tiene a lo más 9 aristas, pero  $K_5$  tiene 10 aristas. Por otro lado, en virtud del corolario 6.0.2, una gráfica planar de orden 6 y sin triángulos tiene a lo más 8 aristas, pero  $K_{3,3}$  tiene 6 vértices y 9 aristas. Por lo tanto no es planar.  $\square$

Como las gráficas completas no son planas podemos preguntarnos como son las gráficas planas con el mayor número posible de aristas.

**Definición 6.0.3.** Se dice que una gráfica planar  $G$  es *planar maximal* si al agregarle cualquier arista que una dos vértices no adyacentes de  $G$  se obtiene una gráfica no planar.

**Lema 6.0.3.** Sea  $F$  una cara de un encaje plano  $P(G)$  con al menos cuatro aristas en su frontera. Entonces, hay dos vértices en la frontera de  $F$  que no son adyacentes.

*Demostración.* Sea  $F$  una cara de un encaje plano  $P(G)$  y supongamos que el conjunto de vértices de la frontera de  $F$  induce una subgráfica completa  $K$ . Probaremos entonces que  $F$  tiene menos de 4 aristas en su frontera. Como  $F$  es una cara, las aristas de  $K$  están en la frontera o están en el exterior de  $F$ . Agréguese un nuevo vértice  $x$  dentro de  $F$  y conéctense los vértices de  $K$  a  $x$ . El resultado es un encaje plano de una gráfica  $H$  con  $V(H) = V(G) \cup \{x\}$  (que tiene a  $G$  como subgráfica inducida). La subgráfica inducida  $H[V(K) \cup \{x\}]$  es completa, y como  $H$  es planar, se tiene que  $|V(K) \cup \{x\}| \leq 4$ . En consecuencia,  $|V(K)| < 4$  y por lo tanto  $F$  tiene a lo más 3 aristas en su frontera.  $\square$

Como corolario directo de este lema se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 6.0.4.** Si  $G$  es una gráfica planar maximal de orden  $n \geq 3$ , entonces la frontera de toda cara de un encaje plano de  $G$ ,  $P(G)$ , tiene exactamente tres aristas.

**Teorema 6.0.6.** Si  $G$  es una gráfica planar maximal de orden  $n \geq 3$ , entonces su tamaño es  $m = 3n - 6$ .

*Demostración.* De acuerdo con el corolario anterior (6.0.4), si  $G$  es una gráfica planar maximal de orden  $n \geq 3$  y tamaño  $m$ , cada cara  $F$  de un encaje plano  $P(G)$  es un triángulo que tiene 3 aristas en su frontera. En consecuencia,  $3c = 2m$ , puesto que no hay puentes. Así, siguiendo con la prueba del teorema 6.0.4 se tiene que  $m = 3n - 6$ .  $\square$

**Teorema 6.0.7.** Si  $G$  es una gráfica planar maximal de orden  $n \geq 4$ , entonces  $\delta(G) \geq 3$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica planar maximal de orden  $n \geq 4$  y tamaño  $m$  y sea  $v \in V(G)$ . Consideremos la gráfica  $G - v$ , la cual tiene orden  $n - 1$  y tamaño  $m - d_G(v)$ . Más aun,  $G - v$  es planar y  $n - 1 \geq 3$ , por lo tanto

$$m - d_G(v) \leq 3(n - 1) - 6.$$

Además, en virtud del teorema anterior  $m = 3n - 6$ , en consecuencia

$$3n - 6 - d_G(v) = m - d_G(v) \leq 3n - 9.$$

Por lo tanto  $d_G(v) \geq 3$ . Como esto sucede para cualquier vértice de  $G$ , entonces  $\delta(G) \geq 3$ .  $\square$

### 6.0.3. Teorema de Kuratowski

El teorema de Kuratowski es uno de los resultados más importantes en el estudio de las gráficas planares. Este teorema establece las condiciones necesarias y suficientes para que una gráfica sea planar.

**Definición 6.0.4.** Una arista  $e = uv$  de  $G$  es **subdividida** cuando es reemplazada por una trayectoria  $u \rightarrow x \rightarrow v$  de longitud dos, con  $x$  un nuevo vértice. Una **subdivisión**  $H$  de  $G$  se obtiene a partir de  $G$  mediante una sucesión de subdivisiones.

Observa que una gráfica es planar si y sólo si sus subdivisiones son planares.

**Lema 6.0.4.** Sean  $G$  una gráfica planar y  $E \subseteq A(G)$  el conjunto de las aristas en la frontera de una cara  $F$  en un encaje plano de  $G$ . Entonces existe un encaje plano  $P(G)$  donde todas las aristas de  $E$  son aristas exteriores.

*Demostración.* Ésta es una prueba geométrica. Sean  $G$  una gráfica planar y  $E$  una cara de un encaje plano de  $G$ ,  $P(G)$ . Considérese un círculo con centro en  $E$  y que contenga en su interior todos los puntos de  $P(G)$  (incluidos todos los puntos de las aristas). Así, utilizando inversión con respecto a este círculo se obtiene una función que manda la cara  $E$  como la cara exterior de la imagen de  $P(G)$  bajo dicha función.  $\square$

Observemos que toda subgráfica de una gráfica planar debe ser planar y toda gráfica que contenga una subgráfica no planar, no puede ser planar. Así, para demostrar que una gráfica disconexa es planar, basta con probar que

cada componente conexa lo es. Por lo tanto, cuando analizamos la planaridad podemos restringir el estudio a gráficas conexas. Así mismo, como una gráfica con vértices de corte es planar si y sólo si cada uno de sus bloques es planar, es suficiente con considerar únicamente gráficas 2-conexas.

**Teorema 6.0.8** (Kuratowski(1930)). Una gráfica es planar si y sólo si no contiene como subgráficas subdivisiones de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$ .

*Demostración.* De acuerdo con la observación anterior y con el lema ?? se tiene la necesidad de la condición de contener como subgráficas subdivisiones de  $K_5$  o  $K_{3,3}$  para que una gráfica sea planar. Por lo tanto resta únicamente probar la suficiencia de esta condición, es decir, que toda gráfica que no contenga como subgráficas subdivisiones de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$  es planar. Hagámoslo por contradicción. Supongamos que la afirmación es falsa. Entonces existe una gráfica no planar 2-conexa  $G$  de tamaño mínimo que no contenga como subgráficas subdivisiones de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$ .

Primero afirmamos que  $G$  debe ser 3-conexa. Supongamos lo contrario, entonces existe un conjunto de corte mínimo que consiste de dos vértices  $\{x, y\}$ . Como  $G$  no tiene vértices de corte, se sigue que tanto  $x$  como  $y$  son adyacentes a uno o más vértices de cada componente conexa de  $G - \{x, y\}$ . Sean  $F_1$  una componente conexa de  $G - \{x, y\}$  y  $F_2$  la unión del resto de las componentes conexas. Además, para  $i = 1, 2$ , sea  $G_i$  la subgráfica inducida de  $G$  definida como  $G_i = [V(F_i) \cup \{x, y\}]$ . Se tienen dos casos posibles, que  $x, y$  sean adyacentes en  $G$  y que no lo sean.

**Caso I**  $xy \in A(G)$ . Veamos que en este caso al menos una de las subgráficas  $G_1$  o  $G_2$  no es planar. De lo contrario, si tanto  $G_1$  como  $G_2$  fueran planares, entonces existen encajes planos de  $G_1$  y  $G_2$  en los cuales la arista  $xy$  está en la frontera de la cara exterior de cada encaje (en virtud del lema 6.0.4). Esto implica que  $G$  misma es planar, lo cual es imposible.

Si  $G_i$  no es planar, como  $G_i$  es subgráfica de  $G$ , se sigue que  $G_i$  no contiene subdivisiones de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$ . Pero como el tamaño de  $G_i$  es estrictamente menor al de  $G$  y  $G_i$  no es planar, esto contradice la propiedad inicial de  $G$ . Por lo tanto este caso no es posible.

**Caso II**  $xy \notin A(G)$ . Sea  $f$  la arista que se obtiene de unir  $x$  con  $y$  y sea  $H_i = G_i + f$  para  $i = 1, 2$ . Si  $H_1$  y  $H_2$  son ambas planares, entonces bajo un razonamiento análogo al anterior, existe un encaje plano de  $G + f$  y por tanto de  $G$ . Como esto no es posible, al menos una de las dos no es planar. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $H_1$  no es planar. Como el tamaño de  $H_1$  es menor al de  $G$ , la gráfica  $H_1$

contiene una subgráfica  $F$  subdivisión de  $K_5$  o de  $K_{3,3}$ . Como  $G_i$  no contiene a tal subgráfica,  $f \in A(F)$ . Sea  $P$  una  $(x, y)$ -trayectoria en  $G_2$ . Al reemplazar  $f$  en  $F$  por  $P$ , obtenemos una subgráfica de  $G$  que es una subdivisión de  $K_5$  o de  $K_{3,3}$ . En contradicción con la hipótesis.

Como en ambos casos llegamos a una contradicción, se concluye que  $G$  es 3-conexa.

En resumen, hasta ahora se tiene que  $G$  es una gráfica no planar de tamaño mínimo tal que no contiene como subgráficas subdivisiones de  $K_5$  ni de  $K_{3,3}$ ; y además es 3-conexa.

Sea  $e = uv$  una arista de  $G$ . Entonces  $H' = G - e$  es planar. Como  $G$  es 3-conexa,  $H'$  es 2-conexa y en virtud del teorema de Dirac (3.3.3), existen ciclos en  $H'$  que contienen a  $u$  y a  $v$ . Sea  $H$  un encaje plano de  $H'$  con un ciclo, digamos  $C = (u = v_0, v_1, \dots, v_l = v, \dots, v_k = u)$ , que contiene a  $u$  y a  $v$  y tal que el número de caras en el interior de  $C$  sea máximo.

Es conveniente definir dos subgráficas de  $H$ . La subgráfica exterior de  $H$  que es la subgráfica inducida por todas las aristas que quedan en el exterior de  $C$  y la subgráfica interior de  $H$ , que es la subgráfica de  $H$  inducida por las aristas que quedan en el interior de  $C$ . Ambas subgráficas existen, de lo contrario  $e$  podría ser agregada ya sea a la subgráfica interior o a la exterior, de  $H$ , de manera que la gráfica resultante,  $G$ , fuera plana.

Notemos que no existen dos vértices distintos de  $\{v_0, v_1, \dots, v_l\}$  o de  $\{v_l, v_{l+1}, \dots, v_k\}$  que estén conectados por una trayectoria en la subgráfica exterior de  $H$ , de lo contrario hay un ciclo en  $H$  que contiene a  $u$  y a  $v$ , con más caras en su interior que  $C$ , lo cual no es posible.

Como  $G$  no es planar, debe de existir una  $(v_s, v_t)$ -trayectoria  $P$  en la subgráfica exterior de  $H$ , con  $0 < s < l < t < k$ , tal que sólo  $v_s$  y  $v_t$  pertenezcan a  $C$ . De lo contrario, podríamos agregar la arista  $uv$  en el exterior de  $C$  y tendríamos un encaje plano de  $G$ .

Necesariamente ningún vértice de  $P$  diferente de  $v_s$  y  $v_t$  es adyacente a un vértice de  $C$  ni está conectado por medio de una trayectoria a un vértice de  $C$  cuyas aristas pertenecen a la subgráfica exterior de  $H$ <sup>1</sup>. Sea  $S$  el conjunto de vértices de  $C$  diferentes de  $v_s$  y  $v_t$ , es decir,  $S = V(C) \setminus \{v_s, v_t\}$  y sea  $H_1$  la componente conexa de  $H - S$  que contiene a  $P$ . En virtud de la definición de  $C$ , la subgráfica  $H_1$  no puede moverse al interior de  $C$  de manera plana. Este hecho, junto con el hecho de que  $G = H + e$  no es planar, implican que la subgráfica interior de  $H$  debe contener una de las siguientes:

1. Una  $(v_a, v_b)$ -trayectoria con  $0 < a < s$  y  $l < b < t$  tal que sólo  $v_a$  y  $v_b$  pertenecen a  $C$  (o, equivalentemente,  $s < a < l$  y  $t < b < k$ ).

---

<sup>1</sup>De ser así, se forma un ciclo que contiene a  $u$  y a  $v$  y con mayor número de caras en su interior.

2. Un vértice  $w$  que no esté en  $C$  que esté conectado a  $C$  por tres trayectorias internamente ajenas tales que el vértice terminal de una de estas trayectorias  $P'$  sea alguno de  $v_0, v_s, v_l$  y  $v_t$ . Si por ejemplo, el vértice terminal de  $P'$  es  $v_0$ , entonces los vértices terminales de las otras dos trayectorias son  $v_a$  y  $v_b$ , donde  $s \leq a < l$  y  $l < b \leq t$  donde no sucede que  $a = s$  y  $b = t$  simultáneamente. Si el vértice terminal de  $P'$  es  $v_s, v_l$  o  $v_t$ , entonces hay tres casos análogos.

3. Un vértice  $w$  que no esté en  $C$  que está conectado a  $C$  por tres trayectorias internamente ajenas  $P_1, P_2$  y  $P_3$ , tales que los vértices terminales de estas trayectorias son tres de los cuatro vértices  $v_0, v_s, v_l$  y  $v_t$ , digamos  $v_0, v_l$  y  $v_s$ , respectivamente, junto con una  $(v_c, v_t)$ -trayectoria  $P_4$  ( $v_c \neq v_0, v_l, w$ ), donde  $v_c$  está en  $P_1$  o  $P_2$ , y  $P_4$  es ajeno a  $P_1, P_2$  y  $C$ , excepto por  $v_c$  y  $v_t$ . Las opciones que quedan para  $P_1, P_2$  y  $P_3$  produce tres casos análogos. En los primeros tres casos se tiene una subdivisión de  $K_{3,3}$  como subgráfica de  $G$ ; mientras que en el último caso se tiene como subgráfica de  $G$  una subdivisión de  $K_5$ . En cualquier caso se tiene una contradicción. Por lo tanto es posible concluir lo deseado.  $\diamond$

## 6.1. Ejercicios

# Capítulo 7

## Coloraciones

Probablemente el tema de coloraciones es una de las es el área más conocidas y estudiada dentro de la teoría de las gráficas. Éstas tienen sus orígenes en los intentos por resolver el famoso Problema de los Cuatro Colores.

En este capítulo, abordaremos las propiedades básicas que cumplen las coloraciones y además de algoritmos para encontrar coloraciones que utilizan pocos colores.

Las coloraciones de gráficas pueden referirse a la asignación de colores a los vértices o a las aristas de una gráfica, ésta asignación puede ser vista como una etiquetación de los vértices o las aristas, donde los colores son las etiquetas.

### 7.1. Coloración por vértices

Comenzamos estudiando coloraciones de los vértices de una gráfica. Este problema tiene considerable relevancia en la resolución de problemas reales. Por ejemplo, en la asignación de horarios para una universidad, los cursos que se superponen en el tiempo no pueden tener el mismo color en el horario. También, la coloración de vértices ha sido utilizada en la asignación de frecuencias de radio para evitar interferencias, en la identificación de regiones geográficas con distintos patrones climáticos y en muchas otras áreas.

**Definición 7.1.1.** Una *k-coloración* (o *k-coloración por vértices*) de una gráfica  $G$  es una función  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ .

La coloración  $c$  es *propia* (o *buena coloración*) si

para todo  $u, v \in V(G)$ , tal que  $uv \in A(G)$ , entonces  $c(u) \neq c(v)$ .

Se dice que una gráfica  $G$  es *k-coloreable* si hay una  $k$ -coloración propia de los vértices de  $G$ .

La coloración que asigna a cada vértice de una gráfica  $G$  un color distinto es una buena coloración. Así que tiene sentido preguntarnos cuál es mínimo número de colores que utiliza una coloración propio. El número cromático  $\chi(G)$ , de  $G$  se define como:

$$\chi(G) = \min\{k ; G \text{ es } k\text{-coloreable}\}.$$

Si  $\chi(G) = k$ , se dice que  $G$  es  $k$ -**cromática**.

Si  $c$  es una  $k$ -coloración de  $G$  y  $V_i = \{v \mid c(v) = i\}$ , entonces a cada conjunto no vacío  $V_i$  se le llama **clase de color** y el conjunto que consta de todas éstas forma una partición de  $V(G)$ .

**Lema 7.1.1.** Sea  $c$  una  $k$ -coloración propia de  $G$ , y sea  $\pi$  cualquier permutación de los  $k$  colores. Entonces, la coloración  $c' = \pi \circ c$  es una  $k$ -coloración propia de  $G$ .

*Demostración.* Sea  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  una coloración propia de  $G$  y  $\pi$  una permutación de los  $k$  colores. Sean  $u, v \in V(G)$  tales que  $uv \in A(G)$ . Como  $c$  es una buena coloración de  $G$ ,  $c(u) \neq c(v)$ ; por otro lado, como  $\pi$  es inyectiva  $\pi(c(u)) \neq \pi(c(v))$ . Por lo tanto  $\pi \circ c$  es una buena coloración de  $G$ .  $\square$

Observa que una  $k$ -coloración de una gráfica  $G$  divide a los vértices de  $G$  en  $k$  conjuntos, uno por cada color.

**Proposición 7.1.1.** Una gráfica  $G$  es  $k$ -cromática si y sólo si existe una partición de  $V(G)$  en  $k$  conjuntos independientes pero no en  $k - 1$  conjuntos independientes de vértices.

**Corolario 7.1.1.** Sea  $G$  una gráfica con  $A(G) \neq \emptyset$ . Entonces,  $\chi(G) = 2$  si y sólo si  $G$  es una gráfica bipartita.

De esto se tiene como consecuencia lo siguiente: Sea  $G$  una gráfica.

- Si ningún vértice de  $G$  pertenece a un ciclo impar, entonces  $\chi(G) \leq 2$ .
- $\chi(G) \geq 3$  si y sólo si  $G$  contiene un ciclo impar.

**Proposición 7.1.2.** Si  $G$  una gráfica y  $H$  una subgráficas de  $G$ , entonces  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .

Recordemos que un **conjunto de independencia máximo** es un conjunto independiente de vértices (o conjunto **estable**) del mayor cardinal posible. El número de vértices en un conjunto de independencia máximo se denota por  $\alpha(G)$  y se le llama el **número de independencia** de  $G$ .

**Definición 7.1.2.** Un **clan** de una gráfica  $G$  es una subgráfica de  $G$  que es completa y no está contenida en una completa más grande. El orden del clan más grande en una gráfica  $G$  es el **número de clan**, al cual se denota como  $\omega(G)$ .

**Teorema 7.1.1.** Si  $G$  una gráfica de orden  $n$ , entonces  $\chi(G) \geq \omega(G)$  y  $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ .

*Demostración.* Sea  $\chi(G) = k$ , entonces

$$\begin{aligned} n = |V(G)| &= |V_1 \cup \dots \cup V_k| \\ &= \sum_{i=1}^k |V_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \alpha(G) \\ &= k\alpha(G). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $k \geq n/\alpha(G)$ .

Por otro lado, sea  $U$  un conjunto de independencia máximo en  $G$  y asígne-se el color 1 a cada vértice de  $U$ . Si a cada vértice de  $V(G) \setminus U$  se le asigna un color distinto, se tiene entonces una coloración propia de  $G$  y por lo tanto

$$\chi(G) \leq |V(G) \setminus U| + 1 = n - \alpha(G) + 1.$$

□

**Proposición 7.1.3.** Sean  $G_1, G_2, \dots, G_k$  gráficas y  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ , entonces

$$\chi(G) = \max\{\chi(G_i) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Debido al siguiente corolario podemos concentrarnos en coloraciones en gráficas conexas.

**Corolario 7.1.2.** Si  $G$  es una gráfica con componentes conexas  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , entonces

$$\chi(G) = \max\{\chi(G_i) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

**Definición 7.1.3.** Una gráfica  $k$ -cromática  $G$  es  $k$ -**crítica** si  $\chi(H) < k$  para cualquier  $H$  subgráfica propia de  $G$ .

Observa que si  $G$  es  $k$ -crítica, entonces  $\chi(G - e) < \chi(G)$ , para toda arista  $e$  de  $G$ .

**Proposición 7.1.4.** Si  $G$  es una gráfica  $k$ -crítica, con  $k \geq 2$ , entonces  $G$  es conexa y  $\delta(G) \geq k - 1$ .

*Demostración.* La conexidad se sigue del corolario 7.1.2. Probemos la segunda afirmación por contradicción. Sea  $G$  una gráfica  $k$ -crítica, tal que  $\delta(G) = d_G(v) \leq k - 2$  para algún  $v \in V(G)$ . Como  $G$  es  $k$ -crítica, existe una  $(k - 1)$ -coloración propia,  $c$ , de  $G - v$ . Pero como  $v$  es adyacente a únicamente  $\delta(G) < k - 1$  vértices y hay  $k - 1$  clases de colores de  $c$ , hay un color disponible  $i$  para  $v$ . Si coloreamos  $v$  con  $i$  se obtiene una  $(k - 1)$ -coloración propia de  $G$ , lo cual es imposible.  $\square$

**Proposición 7.1.5.** Sea  $G$  una gráfica con  $k = \chi(G)$ .

- i)  $G$  contiene una subgráfica  $k$ -crítica.
- ii)  $G$  tiene al menos  $k$  vértices de grado al menos  $k - 1$ .
- iii)  $k \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$ .

*Demostración.* i) Se puede obtener una gráfica  $k$ -crítica a partir de  $G$ , eliminando vértices y aristas de tal manera que siga siendo  $k$ -cromática.

ii) Sea  $H \subseteq G$  una subgráfica  $k$ -crítica. De acuerdo con la proposición 7.1.4,  $d_H(v) \geq k - 1$  para todo vértice  $v$  de  $H$ . Como  $d_G(v) \geq d_H(v)$ ,  $d_G(v) \geq k - 1$ , para todo  $v \in V(H)$ . Además, como cualquier gráfica  $k$ -cromática debe de contener al menos  $k$  vértices,  $|V(H)| \geq k$ , con lo cual se concluye lo deseado.

iii) Sea  $H \subseteq G$  una subgráfica  $k$ -crítica. De acuerdo nuevamente con la proposición 7.1.4,  $\delta(H) \geq k - 1$ , es decir,  $k \leq 1 + \delta(H) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$ .  $\square$

**Lema 7.1.2.** Sea  $v$  un vértice de corte de una gráfica conexa  $G$ , y sean  $G_i$ ,  $i \in \{1, \dots, l\}$ , las componentes conexas de  $G - v$ . Denotemos con  $G_i = G[V(G_i) \cup \{v\}]$ . Entonces

$$\chi(G) = \max\{\chi(G_i) : i \in \{1, 2, \dots, l\}\}.$$

En particular, una gráfica crítica no contiene vértices de corte.

*Demostración.* Supongamos que cada  $G_i$  tiene una  $k$ -coloración propia  $c_i$ . En virtud del lema 7.1.1, podemos permutar de manera que  $c_i(v) = 1$  para todo  $i$ . Estas  $k$ -coloraciones inducen por tanto una  $k$ -coloración de  $G$ . Con lo cual se tiene que  $\chi(G) \leq \max\{\chi(G_i) : i \in \{1, 2, \dots, l\}\}$ . Además, en virtud de la

proposición 7.1.2, se concluye lo deseado. Por lo tanto, si  $G$  es conexa y no trivial con bloques  $B_1, B_2, \dots, B_r$ , entonces  $\chi(G) = \max\{\chi(B_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$ . De manera que si  $G$  es  $k$ -crítica, para algún  $k$ , no puede tener más de un bloque, es decir, no puede tener vértices de corte.  $\square$

El número cromático se puede acotar superiormente utilizando un algoritmo glotón.

**Proposición 7.1.6.** Para toda gráfica  $G$ , se sigue que

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Más aún, existe una coloración propia de  $G$ ,  $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$  tal que  $c(v) \leq d_G(v) + 1$ , para todo  $v \in V(G)$ .

*Demostración.* Sea una gráfica con  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Observa que  $V(G)$  es conjunto de vértices ordenados de manera arbitraria por la etiqueta recibida. Defínase la coloración  $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} c(v_1) &= 1 \quad \text{y} \\ c(v_i) &= \min\{j : c(v_t) \neq j \text{ para todo } t < i \text{ con } v_t \in N_G(v_i)\}. \end{aligned}$$

Entonces  $c$  es una coloración propia y  $c(v_i) \leq d_G(v_i) + 1$ , para todo  $i$ . De este modo, si  $c(v_j) \geq c(v_i)$  para todo  $i$ , entonces

$$\chi(G) \leq c(v_j) \leq d_G(v_j) + 1 \leq \Delta(G) + 1,$$

como se deseaba.  $\square$

Utilizaremos el siguiente resultado para caracterizar a las gráficas que alcanzan la cota superior del teorema anterior

**Lema 7.1.3.** Sea  $G$  una gráfica 2-conexa. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $G$  es una gráfica completa o un ciclo.
- ii) Para toda  $u, v \in V(G)$ , si  $uv \notin G$ , entonces  $\{u, v\}$  es un conjunto de corte.
- iii) Para todo  $u, v \in V(G)$ , si  $d_G(u, v) = 2$ , entonces  $\{u, v\}$  es un conjunto de corte.

*Demostración.* Es claro que *i*) implica *ii*) y que *ii*) implica *iii*). Veamos entonces que *iii*) implica *i*).

Supongamos que *iii*) se cumple. Veremos que o  $G$  es completa o  $d_G(v) = 2$  para todo  $v \in V(G)$ , con lo cual se concluye lo deseado.

Primero notemos que como  $G$  es 2-conexa,  $d_G(v) \geq 2$ , para todo vértice  $v$  de  $G$ . Sea  $w \in V(G)$  con grado máximo, es decir,  $d_G(w) = \Delta(G)$ .

Si  $G[N_G(w)]$  es una gráfica completa, entonces todos los vecinos de  $w$  tienen también el grado máximo. De manera que ya no pueden estar conectados con ningún otro vértice de  $G$ , la cual es una gráfica conexa; por lo tanto  $G = G[N_G(w)]$ , es decir,  $G$  es completa.

Supongamos entonces que  $G[N_G(w)]$  no es completa y sean  $u, v \in N_G(w)$  distintos y no adyacentes. Como ambos son vecinos de  $w$ ,  $d_G(u, v) = 2$  y, de acuerdo con la hipótesis (*iii*.),  $\{u, v\}$  es un conjunto de corte de  $G$ . En consecuencia, existe una partición  $V(G) = W \cup \{u, v\} \cup U$ , donde  $w \in W$  y tal que todas las trayectorias de  $w$  a un vértice de  $U$  tienen que pasar por  $\{u, v\}$ .

Afirmamos que  $W = \{w\}$  y por lo tanto que  $\Delta(G) = 2$ . Supongamos lo contrario, es decir, que  $|W| \geq 2$ . Como  $G$  es 2-conexa,  $w$  no es un vértice de corte y en consecuencia existe un vértice  $x$  en  $W$  tal que  $x \neq w$  y  $xu \in A(G)$  o  $xv \in A(G)$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $xu \in A(G)$ .

Como  $v$  no es un vértice de corte, existe  $y \in U$  tal que  $uy \in A(G)$ . Por lo tanto,  $d_G(x, y) = 2$  y, de acuerdo con *iii*.),  $\{x, y\}$  es un conjunto de corte de  $G$ ; de manera que  $V(G) = W_1 \cup \{x, y\} \cup U_1$  y todas las trayectorias de  $W_1$  a  $U_1$  pasan por  $\{x, y\}$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $w \in W_1$ . Entonces también  $u, v \in W_1$ .

Como  $\{x, y\}$  es un conjunto de corte, existe  $z \in U_1$ . Obsérvese que  $U_1 \subseteq W \cup U$ . Si  $z \in W$  (o  $z \in U$ , respectivamente), entonces todas las  $(z, u)$ -trayectorias pasan por  $x$  (o  $y$ , respectivamente) y  $x$  (o  $y$ , respectivamente) resulta ser un vértice de corte de  $G$ , lo cual contradice el hecho de que  $G$  es 2-conexa.  $\square$

Con este resultado estamos listos para ver que  $\chi(G)$  está acotada por el grado máximo, a menos que  $G$  sea un ciclo de longitud impar o una gráfica completa.

**Teorema 7.1.2** (Brooks (1941)). Sea  $G$  una gráfica conexa. Entonces  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  si y sólo si  $G$  es un ciclo impar o una gráfica completa.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $k = \chi(G)$ . Podemos suponer que  $G$  es  $k$ -crítica ya que si se demuestra la afirmación para gráficas  $k$ -críticas y supongamos que  $G$  es una gráfica conexa tal que  $\chi(G) = \Delta(G) + 1 = k$ . Sea  $H \subseteq G$   $k$ -crítica. Como  $\chi(H) = k = \Delta(G) + 1 > \Delta(H)$ , de acuerdo con la

proposición anterior (7.1.6),  $\chi(H) = \Delta(H) + 1$  y por lo tanto  $H$  es o un ciclo o una gráfica completa. Más aún, como  $\chi(G) = \Delta(G) + 1 = \chi(H) = \Delta(H) + 1$ , entonces  $\Delta(G) = \Delta(H)$ . Si  $H \neq G$ , como  $G$  es conexa, existe un vértice  $u \in V(H)$  y  $v \in V(G)$  tales que  $uv \in A(G) \setminus A(H)$ . De manera que  $d_H(u) < d_G(u)$ , en consecuencia, como  $H$  es regular (independientemente de si es un ciclo o completa),  $\Delta(H) < \Delta(G)$ . En contradicción con la hipótesis. Con lo cual concluimos que  $G = H$ , es decir,  $G$  es o un ciclo o una gráfica completa.

Supongamos por tanto que  $G$  es una gráfica  $k$ -crítica con  $k \geq 2$ . De acuerdo con el lema 7.1.2, la gráfica es 2-conexa. Si  $G$  es un ciclo par, entonces  $k = 2 = \Delta(G)$ . Supongamos entonces que  $G$  no es ni una gráfica completa ni un ciclo (par o impar). Veamos que  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

En virtud del lema 7.1.3, existen  $v_1, v_2 \in V(G)$  con  $d_G(v_1, v_2) = 2$ , digamos  $v_1w, wv_2 \in A(G)$  con  $v_1v_2 \notin A(G)$ , tales que  $H = G - \{v_1, v_2\}$  es conexa. Ordenemos  $V(H) = \{v_3, v_4, \dots, v_n\}$  de tal manera que  $v_n = w$  y, para todo  $i \geq 3$ ,

$$d_H(v_i, w) \geq d_H(v_{i+1}, w).$$

Por lo tanto para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  existe al menos un  $j > i$  tal que  $v_iv_j \in A(G)$  (posiblemente  $v_j = w$ ). En consecuencia, para todo  $1 \leq i < n$ ,

$$|N_G(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}| < d_G(v_i) \leq \Delta(G). \quad (\star)$$

Entonces coloreemos  $v_1, v_2, \dots, v_n$  como sigue:  $c(v_1) = 1 = c(v_2)$  y

$$c(v_i) = \text{mín}\{r : r \neq c(v_j) \text{ para todo } v_j \in N_G(v_i) \text{ con } j < i\}.$$

Es claro entonces que  $c$  es una coloración propia de  $G$ .

De acuerdo con  $(\star)$ ,  $c(v_i) \leq \Delta(G)$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Además,  $w = v_n$  tiene dos vecinos,  $v_1$  y  $v_2$ , del mismo color 1, y como  $v_n$  tiene a lo más  $\Delta(G)$  vecinos, hay un color disponible para  $v_n$ , y por lo tanto  $c(v_n) \leq \Delta(G)$ . Esto muestra que  $G$  tiene una  $\Delta(G)$ -coloración propia y, consecuentemente  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

$\Leftrightarrow$ ) Si  $G = C_{2n+1}$  con  $n \geq 1$ , entonces  $\chi(G) = 3$  y  $\Delta(G) = 2$ . Y si  $G = K_n$ , entonces  $\chi(G) = n$  y  $\Delta(G) = n-1$ . Por lo tanto, en ambos casos se tiene que  $\chi(G) = \Delta(G)$ .

□

El problema más famoso en la historia de la teoría de gráficas es la del número cromático para gráficas planas. El problema se conoció como el problema de los cuatro colores. Esta conjetura decía que si  $G$  es plana, entonces  $\chi(G) \leq 4$ . Este problema estuvo sin resolverse por más de 120 años hasta que en 1976 fue resuelta por Appel y Haken.

Antes de encontrar la solución se fue acotando el número cromático de una gráfica planar.

**Lema 7.1.4.** Si  $G$  es una gráfica planar, entonces  $\chi(G) \leq 6$ .

*Demostración.* La prueba la haremos por inducción sobre el número de vértices,  $n$ . Claramente la afirmación es verdadera para cualquier gráfica de orden menor o igual a 6. De acuerdo con el corolario 6.0.3, una gráfica planar  $G$  tiene un vértice  $v$  tal que  $d_G(v) \leq 5$ . Luego, por hipótesis de inducción,  $\chi(G - v) \leq 6$ . Como  $d_G(v) \leq 5$ , hay un color  $i$  disponible para  $v$  en una 6-coloración de  $G - v$ , y por lo tanto  $\chi(G) \leq 6$ .  $\square$

De manera un poco más complicada pero muy bonita Heawood probó que toda gráfica planar es 5-coloreable.

**Teorema 7.1.3** (Heawood (1890)). Si  $G$  es una gráfica planar, entonces  $\chi(G) \leq 5$ .

*Demostración.* Haremos la demostración por contradicción. Supongamos entonces que la afirmación es falsa y sea  $G$  una gráfica planar 6-crítica. De acuerdo con la proposición 7.1.4,  $\delta(G) \geq 6 - 1 = 5$  y por lo tanto existe un vértice, digamos  $v$ , con  $d_G(v) = \delta(G) \geq 5$ . Además, por el corolario 6.0.3, se sigue que  $d_G(v) \leq 5$ , por lo tanto  $d_G(v) = 5$ .

Como  $G$  es 6-crítica, existe una 5-coloración propia de  $G - v$ , digamos  $c$ . De acuerdo con la hipótesis,  $\chi(G) > 5$ , y por lo tanto para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , existe un  $v_i \in N_G(v)$  tal que  $c(v_i) = i$ . Supongamos que estos vecinos  $v_i$  de  $v$  ocurren en el plano en ese orden, de acuerdo con las manecillas del reloj.

Considérese la subgráfica  $G[i, j] \subseteq G$  hecha con todos los vértices de  $G$  de colores  $i$  y  $j$ . Los vértices  $v_i$  y  $v_j$  están en la misma componente conexa de  $G[i, j]$  (de lo contrario si intercambiamos los colores  $i$  y  $j$  en la componente conexa que contiene  $v_j$  se obtiene una coloración de  $G$ , donde  $v_i$  y  $v_j$  tienen el mismo color  $i$ , entonces si se colorea  $v$  con el color  $j$  que queda se obtiene una 5-coloración de  $G$ ).

Sea  $P_{ij}$  una  $(v_i, v_j)$ -trayectoria en  $G[i, j]$  y sea  $C = vv_1P_{13}v_3v$ . De acuerdo con el acomodo geométrico asumido,  $v_2$  o  $v_4$  y sólo uno de estos vértices, queda dentro de la región encerrada por el ciclo  $C$ . Así, la trayectoria  $P_{24}$  interseca a  $C$  en algún vértice, puesto que  $G$  es planar. Esto contradice el hecho de que los vértices de  $P_{24}$  están coloreados con 2 y 4 puesto que  $C$  no contiene dichos colores.  $\square$

### 7.1.1. Coloración por aristas

En esta sección estudiamos las coloraciones de las aristas de una gráfica.

**Definición 7.1.4.** Una *k*-arista-coloración  $\alpha : A(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  de una gráfica  $G$  es una asignación de  $k$  colores a sus aristas. Una *k*-arista-coloración  $\alpha$  es **propia** si no existen aristas adyacentes  $e_i, e_j$ , tales que  $\alpha(e_i) = \alpha(e_j)$ . Un vértice  $v \in V(G)$  y un color  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  son **incidentes** entre sí, si  $\alpha(uv) = i$  para algún  $uv \in A(G)$ . También se dice que  $i$  está representado en el vértice  $v$ . Si  $v \in V(G)$  no incide con algún color  $i$ , entonces se dice que  $i$  está disponible para  $v$ . Una gráfica  $G$  es ***k*-arista-coloreable** si existe una *k*-arista-coloración propia de  $G$ .

**Definición 7.1.5.** El **índice cromático por aristas** de  $G$ ,  $\chi'(G)$ , se define como:

$$\chi'(G) = \min\{k \mid \text{existe una } k\text{-arista-coloración propia de } G\}.$$

Observemos que una *k*-arista-coloración puede verse como una partición  $M_1, M_2, \dots, M_k$  de  $A(G)$ , donde  $M_i = \{e \in A(G) \mid \alpha(e) = i\}$ . Nótese que es posible que  $M_i = \emptyset$  para algún  $i$ .

**Lema 7.1.5.** Todo conjunto de color  $i$  en una *k*-arista-coloración propia es un apareamiento. Más aún, para cada gráfica  $G$ ,  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq m$ . Donde  $m$  es el tamaño de  $G$ .

Sean  $H$  una subgráfica generadora de  $G$  y  $C = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$  una *k*-arista-coloración propia de  $H$ . Decimos que un color  $c$  está disponible para una arista  $e$  de  $A(G) \setminus A(H)$  si está disponible en ambos extremos de  $e$ , es decir, si no hay ninguna arista de color  $c$  adyacente a  $e$ . Así, si una arista  $e$  no está coloreada, cualquier color disponible para  $e$  puede ser asignado a ésta para extender la coloración  $C$  a una *k*-arista coloración propia de  $H + e$ .

Sean  $i$  y  $j$  cualesquiera dos colores, y sea  $H_{ij}$  la subgráfica inducida por las aristas de color  $i$  y  $j$ , o sea,  $H = H[M_i \cup M_j]$ . Como  $M_i$  y  $M_j$  son apareamientos ajenos, cada componente de  $H_{ij}$  es o un ciclo de longitud par o una trayectoria. A las componentes conexas de  $H_{ij}$  que son trayectorias las llamaremos *ij-trayectorias*.

**Teorema 7.1.4.** Si  $G$  es bipartita, entonces  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

*Demostración.* De acuerdo con el lema 7.1.5, basta con probar que para toda gráfica bipartita  $G$ ,  $\chi'(G) \leq \Delta(G)$ .

La prueba la haremos por inducción sobre el tamaño,  $m$ , de  $G$ . Si  $m = 1$ , es claro que  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

Supongamos que la afirmación es cierta para toda gráfica de tamaño  $m - 1$  con  $m > 1$  y sea  $G$  una gráfica de tamaño  $m$ .

Sea  $e = uv$  una arista de  $G$ . De acuerdo con la hipótesis de inducción,  $H = G - e$  tiene una  $\Delta(G - e)$ -arista-coloración propia, por lo tanto también una  $\Delta(G)$ -arista-coloración propia  $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ .

Si algún color está disponible para  $e$ , ese color puede asignársele a  $e$  y obtener una  $\Delta(G)$ -arista-coloración propia de  $G$ .

Asumamos entonces que cada uno de los  $\Delta(G)$  colores está representado ya sea en  $u$  o en  $v$ . Como el grado de  $u$  en  $G - e$  es a lo más  $\Delta(G) - 1$ , al menos un color  $j$  está disponible en  $u$  y representado en  $v$ . Del mismo modo, al menos un color  $i$  está disponible en  $v$  y representado en  $u$ .

Considérese la subgráfica  $H_{ij}$ . Como  $u$  tiene grado uno en esta subgráfica, la componente que contiene a  $u$  es una  $ij$ -trayectoria  $P$ . Observemos que esta trayectoria no puede terminar en  $v$ , de lo contrario sería de longitud par, empezando por una arista de color  $i$  y terminando en una arista de color  $j$  y  $P + e$  sería entonces un ciclo impar en  $G$ , en contradicción con el hecho de que  $G$  es bipartita.

Intercambiando los colores en  $P$  se obtiene una nueva  $\Delta(G)$ -arista coloración propia de  $H$  en la cual el color  $i$  está disponible tanto en  $u$  como en  $v$ . Así, asignándole a  $e$  el color  $i$ , se obtiene una  $\Delta(G)$ -arista-coloración de  $G$ .  $\square$

También se puede acotar por abajo el índice cromático de una gráfica en términos del número de independencia por aristas.

**Teorema 7.1.5.** Si  $G$  es una gráfica de tamaño  $m \geq 1$ , entonces

$$\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}.$$

*Demostración.* Sean  $\chi'(G) = k$  y  $\{M_1, \dots, M_k\}$  las clases de una  $k$ -arista-coloración propia de  $G$ . Entonces,

$$|M_i| \leq \alpha'(G) \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq k$$

En consecuencia,

$$m = |A(G)| = \sum_{i=1}^k |M_i| \leq k\alpha'(G).$$

Por lo tanto,  $\chi'(G) \geq m/\alpha'(G)$ .  $\square$

A continuación probaremos un lema que utilizaremos en la demostración de uno de los resultados más importante del tema de coloraciones por aristas: el teorema de Vizing. La ventaja de este lema es que nos brinda un algoritmo para encontrar un coloración por aristas de una gráfica.

**Lema 7.1.6.** Sean  $G$  una gráfica,  $v$  un vértice de  $G$ ,  $e$  una arista incidente a  $v$  y  $k$  un entero tal que  $k \geq \Delta(G)$ . Si  $G - e$  tiene una  $k$ -arista-coloración propia  $\alpha$  tal que todo vecino de  $v$  en  $G$  tiene un color disponible, entonces  $G$  es  $k$ -arista-coloreable.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica,  $v \in V(G)$  y  $e = vu \in A(G)$  tales que existe una  $k$ -arista-coloración,  $\alpha$ , de  $G - e$  en la cual todo vecino de  $v$  en  $G$  tiene al menos un color disponible.

Para encontrar una  $k$ -arista-coloración propia de  $G$  a partir de  $\alpha$  consideremos la gráfica bipartita  $H$  con partición  $(X, Y)$ , donde  $X = N_G(v)$  e  $Y = \{1, 2, \dots, k\}$  y si  $x \in X$  y  $j \in Y$  tenemos que  $xj \in A(H)$  si y sólo si  $j$  es un color disponible para  $x$  en  $\beta_\alpha$ , donde  $\beta_\alpha$  es la coloración de  $\alpha$  restringida a  $G - v$ .

En particular, para todo  $x \in X \setminus \{u\}$  el color de  $xv$  está disponible para  $x$  en  $G - v$ , de manera que  $H$  contiene el apareamiento

$$M = \{(x, \alpha(xv)); x \in X \setminus \{u\}\}.$$

Así mismo, nota que todo apareamiento  $N$  en  $H$  corresponde a una coloración parcial (pues no tiene porqué saturar a todo vértice de  $X$ )  $\alpha_N$  de  $\partial(v)$ <sup>1</sup>. Más aún, dicha coloración es compatible con  $\beta_\alpha$ . Para ver esto, sea  $N = \{x_1i_1, x_2i_2, \dots, x_li_l\}$  un apareamiento de  $H$ , con  $x_j \in X$  y  $1 \leq i_j \leq k$ . Consideremos la coloración  $\alpha_N : \{x_1v, x_2v, \dots, x_lv\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  dada por  $\alpha_N(x_jv) = i_j$ , para todo  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Como  $N$  es apareamiento,  $i_j \neq i_{j'}$  para todo  $j \neq j'$ , por lo tanto,  $\alpha_N$  es una coloración propia de  $\{x_1v, x_2v, \dots, x_lv\} \subseteq \partial(v)$ , y por la definición de  $H$ ,  $\alpha_N$  es compatible con  $\beta_\alpha$ .

Por lo tanto, todo apareamiento en  $H$  que satura a  $X$  corresponde a una coloración total de  $\partial(v)$ , la cual forma junto con  $\beta_\alpha$  una  $k$ -arista-coloración propia de  $G$ .

Supongamos entonces que  $H$  no tiene un apareamiento que sature a  $X$ . El objetivo es modificar la coloración  $\alpha$  a una coloración  $\alpha'$  de tal manera que la gráfica bipartita correspondiente,  $H'$ , contenga un apareamiento que sature a  $X$ , y con esto obtener una  $k$ -arista-coloración propia de  $G$ .

De acuerdo con la hipótesis inicial, en cada vértice de  $X \setminus \{u\}$  incide al menos una arista de  $H - M$ , y en el vértice  $u$  incide también al menos una de estas aristas, ya que  $u$  no está saturado por  $M$  y

$$d_{G-e}(u) = d_G(u) - 1 \leq \Delta(G) - 1 \leq k - 1.$$

Entonces cada vértice de  $X$  incide con al menos una arista de  $H - M$ .

---

<sup>1</sup> $\partial(v)$  denota al conjunto de aristas de  $G$  con extremo  $v$ , es decir, para  $v \in V(G)$ ,  $\partial(v) := \{e \in A(G); e = uv \text{ para algún } u \in V(G)\}$ .

Denotemos con  $Z$  al conjunto de todos los vértices de  $H$  conectados con  $u$  por una trayectoria  $M$ -alternante, y sean  $R = X \cap Z$  y  $B = Y \cap Z$ .

Veamos que  $N_H(R) = B$ . Es claro que  $B \subseteq N_H(R)$  ya que si  $b \in B$ , existe una  $(u, b)$ -trayectoria  $M$ -alternante  $P = uy_2x_3 \dots x_{j-1}b$ , con  $x_{j-1} \in R$  (puesto que  $H$  es bipartita). Por ende  $b \in N_H(R)$ . Por otro lado, sean  $y \in N_H(R)$  y  $x \in R$  tal que  $xy \in A(H)$ .

Observemos que para toda  $(u, w)$ -trayectoria  $M$ -alternante en  $H$ , como la primera arista de dicha trayectoria no puede pertenecer a  $M$ , si  $w \in X$ , entonces la última arista está en  $M$  y si  $w \in Y$ , entonces la última arista no está en  $M$ .

Como  $x \in R$ , existe una  $(u, x)$ -trayectoria  $M$ -alternante en  $H$ ,  $P = uy_1x_1 \dots y_lx$ . Y en virtud de la observación anterior  $y_lx \in M$ . De manera que  $xy \notin M$ , de lo contrario habría dos aristas en  $M$  adyacentes. Por lo tanto, si  $y$  no pertenece a  $P$ , entonces  $P' = uy_1x_1 \dots y_lxy$  es una  $(u, y)$ -trayectoria  $M$ -alternante, de lo contrario  $uPy$  es una  $(u, y)$ -trayectoria  $M$ -alternante; en cualquier caso  $y \in B$ . En conclusión  $N_H(R) = B$ .

Sabemos entonces que para cualquier  $x \in R \setminus \{u\}$  la arista  $(x, \alpha(xv))$  pertenece a  $M$ , que  $u$  no está saturado por  $M$  y que  $N_H(R) = B$ , en consecuencia  $|R| - 1 = |B|$ . De este modo,

$$B = \{\alpha(xv); x \in R \setminus \{u\}\}. \quad (7.1)$$

Como  $|N_H(R)| = |B| = |R| - 1$  y por hipótesis principal al menos un color está disponible para cada vértice de  $R$ , en virtud del principio del palomar, algún color  $i$  en  $B$  está disponible para dos vértices  $x, y$  de  $R$ . Además, por (7.1), todo color en  $B$  está representado en  $v$  en  $G - e$  con la coloración  $\alpha$ . En particular,  $i$  está representado en  $v$ .

Por otro lado, como  $d_{G-e}(v) \leq k - 1^2$ , algún color  $j$  está disponible en  $v$  en  $G - e$ . Observemos que, de acuerdo con (7.1),  $j \notin B$ . Por lo tanto, en virtud de la definición de  $H$ ,  $j$  está representado en cada vértice de  $R$  en  $G - e$  con respecto a  $\alpha^3$ . En particular, en  $x$  y en  $y$ .

Regresemos a la gráfica  $G - e$ . De acuerdo con las observaciones anteriores, cada uno de los vértices  $v, x, y$  son extremos de  $ij$ -trayectorias<sup>4</sup> en  $G - e$ . Consideremos la  $ij$ -trayectoria que empieza en  $v$ . Claramente esta trayectoria

<sup>2</sup>Esto ya que al  $G - e$  ser  $k$ -arista-coloreable,  $\Delta(G) \leq k$  y  $d_{G-e}(v) = d_G(v) - 1 \leq \Delta(G) - 1 \leq k - 1$ .

<sup>3</sup>De lo contrario, si  $x \in R$  es tal que  $j$  no está representado en  $G - e$  con respecto a  $\alpha$ , entonces  $xj \in H$  y por lo tanto,  $j \in N_H(R) = B$  en contradicción con la observación anterior.

<sup>4</sup>Recordemos que una  $ij$ -trayectoria, con respecto a una coloración  $\alpha$  de  $G$  es una trayectoria de  $G$  que alterna los colores  $i$  y  $j$  y es maximal. [Ver la definición en página 97]

no puede terminar tanto en  $x$  como en  $y$ . Supongamos entonces que la  $ij$ -trayectoria que empieza en  $v$  no termina en  $y$ , y sea  $z$  el extremo final de la  $ij$ -trayectoria,  $P$ , que empieza en  $y$ . Intercambiando los colores  $i$  y  $j$  en  $P$ , se obtiene una nueva coloración  $\alpha'$  de  $G - e$ .

Ahora, sea  $H'$  la gráfica bipartita formada como  $H$ , sólo que esta vez respecto a la coloración  $\alpha'$ . Las únicas diferencias entre  $H$  y  $H'$  ocurren en  $y$  y, posiblemente en  $z$  (si  $z \in X$ ). Más aun, como  $v$  no pertenece a  $P$ , el apareamiento  $M$  sigue siendo un apareamiento en  $H'$ .

Consideremos la  $(u, y)$ -trayectoria  $M$ -alternante  $Q$  en  $H$ . Si  $z$  pertenece a  $Q$ , entonces  $z \in R$  (puesto que  $z$  es un vértice de  $G$ ) y la trayectoria alternante  $uQz$  es una trayectoria  $M$ -alternante en  $H'$  ya que termina con una arista en  $M$ . También, como  $j \notin B$ ,  $zj \notin A(H)$ , puesto que  $z \in R$  y  $N_H(R) = B$ . Por lo tanto,  $j$  está representado en  $z$  en  $G - e$  con respecto a  $\alpha$ . De este modo, la trayectoria  $P$  debió haber terminado originalmente en  $z$  en una arista de color  $j$ <sup>5</sup>, y ahora termina en una arista de color  $i$ . Por lo tanto, con respecto a la coloración  $\alpha'$ , el color  $j$  está disponible en  $z$  y  $Q' = uQzj$  es una trayectoria  $M$ -aumentable en  $H'$ .

Por otro lado, si  $z$  no cae en  $Q$ ,  $Q' = uQyj$  es una trayectoria  $M$ -aumentable en  $H'$ .

En cualquier caso, sea  $M' = M \Delta A(Q')$ . Veamos que  $M'$  es un apareamiento que satura a  $H'$ . Es claro que  $M$  satura a  $u$  ya que  $Q'$  empieza en  $Q$  y  $M$  no satura a  $u$ , de manera que la arista de  $Q'$  que contiene a  $u$ , pertenece a la diferencia simétrica de  $M$  y  $A(Q')$ . Por otro lado, sea  $w \in X \setminus \{u\}$ , como sabemos que para cualquier  $w \in X \setminus \{u\}$ ,  $(w, \alpha(wv)) \in M$ . Si  $(w, \alpha(wv)) \notin A(Q')$ , entonces  $(w, \alpha(wv)) \in M \Delta A(Q') = M'$ ; si  $(w, \alpha(wv)) \in A(Q')$ , como  $Q'$  es una trayectoria  $M$ -aumentable, existe una arista  $i_w w \in A(Q') \setminus M$  y por lo tanto en  $M' = M \Delta A(Q')$ . En cualquier caso  $w$  está saturado por  $M'$ . Por lo tanto  $M'$  es un apareamiento en  $H'$  que satura a todo vértice en  $X$  y este apareamiento corresponde a una coloración completa de  $\partial(v)$ . Así, como mencionamos anteriormente, esta coloración junto con  $\beta_{\alpha'}$  (la restricción de  $\alpha'$  a  $G - v$ ) forma una  $k$ -arista-coloración propia de  $G$ .  $\square$

La siguiente figura muestra cómo funciona la prueba del lema anterior, ya que ésta genera un algoritmo para encontrar una  $k$ -arista-coloración propia de una gráfica  $G$  a partir de una  $k$ -arista-coloración propia de  $G - e$  (que satisfaga las hipótesis del lema).

Como el lema 7.1.6 es para todo entero  $k \geq \Delta(G)$ , podemos considerar  $k = \Delta(G) + 1$  y por inducción sobre el tamaño de la gráfica obtener como

---

<sup>5</sup>De lo contrario, si terminara en una arista de color  $i$ , como existe la arista de color  $j$ , ésta se podría agregar a  $P$ , teniendo una  $ij$ -trayectoria mayor, lo cual es imposible dada la maximalidad de este tipo de trayectorias.

corolario de éste el siguiente teorema.

**Teorema 7.1.6** (Vizing (1964)). Para toda gráfica  $G$  se sigue que

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*Demostración.* La primera desigualdad ya la tenemos. Sólo falta probar que  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ , para toda gráfica  $G$ . Esto lo haremos por inducción sobre el tamaño,  $m$ , de la gráfica.

Si  $m = 1$ , es claro que  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Supongamos entonces que para toda gráfica de tamaño  $m - 1$ , con  $m > 1$ , se satisface lo deseado y sea  $G$  una gráfica de tamaño  $m$ . Sea  $e = uv$  una arista de  $G$ . Así, como el tamaño de  $G - e$  es  $m - 1$ , de acuerdo con la hipótesis de inducción,  $\chi'(G - e) \leq \Delta(G - e) + 1$ . Además, como  $\Delta(G - e) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ ,  $\chi'(G - e) \leq \Delta(G) + 1$ . Es decir, existe una  $(\Delta(G) + 1)$ -arista-coloración propia de  $G - e$ ,  $\alpha$ . Más aún, como para todo  $w \in V(G)$   $d_{G-e}(w) \leq \Delta(G - e) \leq \Delta(G) + 1$ , se satisfacen las hipótesis del lema 7.1.6, por lo tanto, existe una  $(\Delta(G) + 1)$ -arista-coloración propia de  $G$  y en consecuencia  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .  $\square$

Con este teorema se tiene que para cualquier gráfica  $G$ , su índice cromático por aristas es  $\Delta(G)$  o  $\Delta(G) + 1$ . Así, se puede separar al conjunto de todas las gráficas simples en dos clases, la clase de todas las gráficas  $G$  tales que  $\chi'(G) = \Delta(G)$  y la clase de todas las gráficas  $G$  tales que  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ . Se dice entonces que una gráfica es de clase 1 si pertenece a la primera clase mencionada y de clase 2 si pertenece al segundo de estos conjuntos.

Encontrar una caracterización de las gráficas que pertenecen a la clase 2 es uno de los problemas abiertos famosos de la teoría de gráficas. En 1981 Holyer demostró que el problema de determinar cuándo una gráfica pertenece a la clase 1 o a la clase 2 es *NP*-completo.

**Parte II**  
**Digráficas**



# Capítulo 8

## Digráficas

En las digráficas o gráficas dirigidas las aristas tienen una dirección, la cual indica la relación entre los vértices. Esta dirección se obtiene al modelar situaciones en las que las relaciones entre los elementos de la gráfica son asimétricas. Un ejemplo de una relación asimétrica que puede ser modelada con una digráfica es la relación de "es padre de". Si tenemos un conjunto de personas, podemos representar la relación de "es padre de" con una digráfica donde los vértices representan a las personas y las aristas representan la relación "es padre de". En este caso, la dirección de las aristas es importante, ya que si  $A$  es padre de  $B$ ,  $B$  no puede ser padre de  $A$ .

En este capítulo, exploraremos las propiedades fundamentales de los digráficas y las similitudes que tienen con las gráficas.

### 8.1. Primeros conceptos

Comenzamos con las definiciones básicas de las digráficas. Muchas de estas son conceptos análogos al de gráficas solo que incluyendo el carácter de dirigido.

**Definición 8.1.1.** Una *gráfica dirigida* o *digráfica*  $D$ , es una pareja ordenada  $(V(D), A(D))$  que consta de un conjunto finito no vacío,  $V(D)$ , de *vértices* y de un conjunto,  $A(D)$ , (posiblemente vacío) de parejas ordenadas de elementos distintos de  $V(D)$ ; a los elementos de dicho conjunto les llamamos *arcos* o *flechas*.

En el caso de las digráficas, al representarlas en diagramas los arcos se dibujan como flechas, de manera que el arco  $(u, v)$  se representa por medio de una flecha del vértice  $u$  al vértice  $v$  y en este caso se dice que  $u$  *domina* a  $v$ , o que  $v$  está *dominado* por  $u$ .

Mucha de la terminología utilizada para digráficas es muy similar a la utilizada para gráficas. Por ejemplo, dada una digráfica  $D$ , el **orden** de la digráfica es el cardinal del conjunto de vértices (que usualmente denotaremos con  $n$ ) y el **tamaño** de  $D$  es el cardinal del conjunto de arcos de  $D$  (al cual denotamos generalmente con  $m$ ).

**Definición 8.1.2.** Sean  $D = (V(D), A(D))$  una digráfica y  $v \in V(D)$ .

- La **ex vecindad** de  $v$  es el conjunto  $N_D^+(v) = \{u \in V(D) \mid (v, u) \in A(D)\}$  a cuyos elementos se les llama **ex vecinos** de  $v$ . La cardinalidad de  $N_D^+(v)$  es el **ex grado** de  $v$  que denotamos con  $d_D^+(v)$ .
- La **in vecindad** de  $v$  es el conjunto  $N_D^-(v) = \{u \in V(D) \mid (u, v) \in A(D)\}$  a cuyos elementos se les llama **in vecinos** de  $v$ . El cardinal de  $N_D^-(v)$  es el **in grado** de  $v$  que denotamos con  $d_D^-(v)$ .
- El **grado** de  $v$  se define como  $d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$ .

A un vértice de in grado cero le llamaremos **fuelle** mientras que a un vértice de ex grado cero lo llamaremos **pozo**.

Además, para todo  $B \subseteq V(D)$  se define su ex vecindad, in vecindad y los respectivos grados de  $B$  como

- $N_D^+(B) = \bigcup_{v \in B} N_D^+(v) \setminus B$  y  $N_D^-(B) = \bigcup_{v \in B} N_D^-(v) \setminus B$ .
- $d_D^+(B) = |N_D^+(B)|$  y  $d_D^-(B) = |N_D^-(B)|$ .

También, dado  $B \subseteq V(D)$ , se define la **ex vecindad cerrada** de  $B$  en  $D$  y la **in vecindad cerrada** de  $B$  en  $D$  como  $N^+[B] = N^+(B) \cup B$  y  $N^-[B] = N^-(B) \cup B$ .

A cada digráfica  $D$  se le puede asociar otra digráfica  $\overleftarrow{D}$ , que se obtiene al cambiar la orientación de cada arco de  $D$ . A la digráfica  $\overleftarrow{D}$  se le llama la **reversa** de  $D$ . Como la reversa de la reversa es simplemente la digráfica original, la reversa de una digráfica puede pensarse como su “dual en orientación”.

En el caso dirigido también tenemos en resultado similar al teorema de los apretones de manos.

**Teorema 8.1.1.** Si  $D$  es una digráfica de tamaño  $m$ , entonces:

$$\sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v) = m.$$

*Demostración.* Cuando se suman los ex grados de todos los vértices de la digráfica, cada arco es tomado en cuenta una sola vez. Lo mismo sucede cuando se suman los in grados de todos los vértices.  $\square$

**Definición 8.1.3.** Dos digráficas  $D_1$  y  $D_2$  son **isomorfas**, en símbolos  $D_1 \cong D_2$ , si existe una función biyectiva  $f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$  tal que  $(u, v) \in A(D_1)$  si y sólo si  $(f(u), f(v)) \in A(D_2)$ . En dicho caso se dice que  $f$  es un **isomorfismo** de  $D_1$  a  $D_2$ .

**Definición 8.1.4.** Sea  $D$  una digráfica. Se dice que una digráfica  $D'$  es una **subdigráfica** de  $D$ , en símbolos  $D' \subseteq D$ , si  $V(D') \subseteq V(D)$  y  $A(D') \subseteq A(D)$ . Una subdigráfica  $D'$  de  $D$  es una **subdigráfica generadora** de  $D$  si  $V(D') = V(D)$ .

Operaciones como eliminación de vértices o de arcos, subgráficas inducidas (ya sea por vértices o por aristas) son definidas de manera intuitiva, siguiendo el mismo principio que se utilizó en las gráficas no dirigidas.

**Definición 8.1.5.** Se dice que una digráfica  $D$  es **simétrica** si siempre que  $(u, v)$  sea un arco de  $D$ , también lo es  $(v, u)$ .

La **digráfica simétrica completa** (o simplemente digráfica completa),  $K_n^*$  de orden  $n$  es la digráfica que contiene todos los arcos posibles entre los  $n$  vértices (es decir, en ambas direcciones).

**Definición 8.1.6.** Una **gráfica orientada** es una digráfica en la cual se cumple que:

$$(u, v) \in A(D) \Rightarrow (v, u) \notin A(D).$$

Dada una gráfica  $G$ , una **orientación** de  $G$  consiste en una gráfica orientada con el mismo conjunto de vértices que  $G$ , en la que cada arista es intercambiada por un arco, es decir, si  $\{u, v\} \in A(G)$  entonces  $(u, v)$  o  $(v, u)$  (pero no ambos) pertenece al conjunto de arcos de su orientación. Una **orientación de una digráfica**  $D$  es una subdigráfica de  $D$  obtenida al eliminar de ésta exactamente un arco entre  $u$  y  $v$  para todo par de vértices distintos tales que  $(u, v), (v, u) \in A(D)$ .

La **gráfica subyacente** de una digráfica  $D$ ,  $SG(D)$ , es la gráfica obtenida al reemplazar cada arco  $(u, v)$  o la pareja simétrica de arcos  $(u, v), (v, u)$ , por la arista  $\{u, v\}$ .

Un **torneo** es una orientación de una gráfica completa.

**Definición 8.1.7.** Una **biorientación** de una gráfica  $G$  es una digráfica  $D$  obtenida al reemplazar en  $G$  cada arista  $\{x, y\}$  por alguno (o ambos) de los arcos  $(x, y), (y, x)$ .

**Definición 8.1.8.** Una digráfica  $D$  es **regular de grado  $r$**  o  **$r$ -regular**, si para todo vértice  $v$  de  $D$  se tiene que

$$d^+(v) = r = d^-(v).$$

Los conceptos de camino (cerrado y abierto), paseo, trayectoria, circuito y ciclo en gráficas tiene su análogo en digráficas, la diferencia radica en que la dirección de los arcos debe ser compatible en cualquiera de estos caminos. En particular, cuando se trata de digráficas, en los términos **camino dirigido** (cerrado y abierto), **paseo dirigido**, **trayectoria dirigida**, **circuito dirigido** y **ciclo dirigido** se puede omitir la palabra “dirigido”. Definamos formalmente **camino dirigido** en una digráfica para dar un ejemplo de la analogía entre los conceptos de gráficas y digráficas.

**Definición 8.1.9.** Sea  $a_i = (u_i, u_{i+1})$  un arco de  $D$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ . La sucesión  $W = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  es un **camino dirigido de longitud  $k$**  de  $u_1$  a  $u_{k+1}$ , o un  $(u_1, u_{k+1})$ -camino dirigido en  $D$ .

Sean  $D$  una digráfica y  $X, Y$  subconjuntos de  $V(D)$ . Con  $(X \rightarrow Y)_D$  denotaremos al conjunto de arcos con cola en  $X$  y cabeza en  $Y$ , es decir,

$$(X \rightarrow Y)_D = \{(x, y) \in A(D) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Y con  $(X, Y)_D$  al conjunto de arcos entre  $X$  e  $Y$ , es decir,

$$(X, Y)_D = (X \rightarrow Y)_D \cup (Y \rightarrow X)_D.$$

Una  $(X, Y)$ -trayectoria en  $D$  es una  $(x, y)$ -trayectoria para algún  $x \in X$  y un  $y \in Y$  tal que  $V(P) \cap (X \cup Y) = \{x, y\}$ . Si  $X = Y$ , entonces a la  $(X, Y)$ -trayectoria le llamaremos simplemente  $X$ -trayectoria.

**Lema 8.1.1.** Si una digráfica  $D$  contiene un  $(u, v)$ -camino de longitud  $\ell$ ,  $W$ , entonces  $D$  contiene una  $(u, v)$ -trayectoria de longitud a lo más  $\ell$  cuyas flechas pertenecen a  $W$ . Si  $D$  tiene un paseo cerrado  $W = (x, v_1, \dots, v_k, x)$ , entonces  $D$  contiene un ciclo  $C$  que contiene a  $x$  y tal que  $A(C) \subseteq A(W)$ .

**Teorema 8.1.2.** Si  $D$  es una digráfica tal que  $d^+(v) \geq k \geq 1$  para todo  $v \in V(D)$ , entonces  $D$  contiene un ciclo de longitud al menos  $k + 1$ .

*Demostración.* Considera una trayectoria de longitud máxima y ve lo que sucede en alguno de los extremos.  $\square$

**Corolario 8.1.1.** Toda digráfica acíclica contiene tanto un pozo como una fuente.

Sean  $D$  una digráfica y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  un orden de sus vértices. Se dice que este orden es un **orden acíclico** si para cualquier arco  $(x_i, x_j)$  en  $D$  se tiene que  $i < j$ . Claramente, un orden acíclico de  $D$  induce un orden acíclico de cualquier subdigráfica  $H$  de  $D$ . Como ningún ciclo tiene un orden acíclico, ninguna gráfica con algún ciclo tiene un orden acíclico. Por otro lado, se tiene lo siguiente.

**Proposición 8.1.1.** Toda digráfica acíclica tiene un orden acíclico de sus vértices.

*Demostración.* Ésta es una prueba constructiva en la cual se describe un procedimiento para generar un orden acíclico de los vértices de una digráfica acíclica  $D$ . En el primer paso se elige un vértice  $v$  de in grado cero (Corolario 8.1.1). Se define  $x_1 = v$  y se elimina  $x_1$  de  $D$ . En el  $i$ -ésimo paso se elige un vértice  $u$  de in grado cero en la subdigráfica de  $D$  que ha resultado luego de la eliminación de los vértices  $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$ . De manera que este procedimiento tiene  $|V(D)|$  pasos.

Veamos que el procedimiento genera un orden acíclico de los vértices de  $D$ . Supongamos que  $x_i \rightarrow x_j$  en  $D$  pero  $i > j$ . Como  $x_j$  fue elegido antes que  $x_i$ , significa que  $x_j$  no fue de in grado cero en el  $j$ -ésimo paso del proceso, lo cual es una contradicción.  $\square$

**Corolario 8.1.2.** Toda digráfica acíclica  $D$  tiene un único orden acíclico si y sólo si  $D$  es trazable<sup>1</sup>.

*Demostración.* **Tarea.**  $\square$

**Proposición 8.1.2.** Sea  $D$  una digráfica acíclica con exactamente una fuente,  $x$ , y un pozo,  $z$ . Entonces, para todo vértice  $v \in V(D)$  existe una  $(x, v)$ -trayectoria y una  $(v, z)$ -trayectoria en  $D$ .

*Demostración.* Considérese una trayectoria que empiece en  $v$  y que sea de la mayor longitud posible, ésta resulta ser una  $(v, z)$ -trayectoria. Así mismo, si se considera una trayectoria que termine en  $v$  y que sea de la mayor longitud posible, ésta resulta ser una  $(x, v)$ -trayectoria.  $\square$

## 8.2. Conexidad

Como vimos en el capítulo 3, la conexidad es un concepto que trata la capacidad de una gráfica de estar conectada de alguna manera. En las digráficas, la noción de conexidad se vuelve más compleja debido a la presencia de

<sup>1</sup>Se dice que una digráfica es **trazable** si contiene una trayectoria dirigida Hamiltoniana.

aristas unidireccionales, lo que implica significa que la existencia de un  $(u, v)$ -camino no implica necesariamente la existencia de un  $(v, u)$ -camino. En esta sección veremos los diferentes tipos de conexidad que hay en digráficas.

**Definición 8.2.1.** Una digráfica  $D$  es **conexa** (o **débilmente conexa**) si la subgráfica subyacente es conexa. Una digráfica  $D$  es **fuerte** (o **fuertemente conexa**) si para cualesquiera dos vértices  $u, v$  existen en  $D$  tanto una  $(u, v)$ -trayectoria como una  $(v, u)$ -trayectoria.

Si existe una  $(u, v)$ -trayectoria en  $D$ , se dice que  $v$  es **alcanzable** desde  $u$  en  $D$ .

**Definición 8.2.2.** Sean  $u, v \in V(D)$ , si existe una  $(u, v)$ -trayectoria en  $D$ , entonces definimos la **distancia dirigida** (o simplemente distancia) de  $u$  a  $v$  en  $D$  como:

$$\vec{d}_D(u, v) = \text{mín}\{k \mid \text{existe una } (u, v)\text{-trayectoria en } D \text{ de longitud } k\}.$$

Las distancias  $\vec{d}_D(u, v)$  y  $\vec{d}_D(v, u)$  no siempre son iguales, de manera que esta distancia no necesariamente es una métrica. Además, notemos que  $\vec{d}_D(u, v)$  existe para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  de  $D$  si y sólo si  $D$  es fuertemente conexa.

**Definición 8.2.3.** Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa. La **excentricidad**,  $e(u)$  de un vértice  $u$  de  $D$  se define como:

$$e(u) = \text{máx}\{\vec{d}_D(u, v) \mid v \in V(D)\}.$$

Definimos el **radio** de  $D$ ,  $rad(D)$  y el **diámetro** de  $D$ ,  $diam(D)$  como:

$$rad(D) = \text{mín}\{e(u) \mid u \in V(D)\} \quad \text{y} \quad diam(D) = \text{máx}\{e(u) \mid u \in V(D)\}.$$

Se dice que un vértice  $v$  de  $D$  es **central** si su excentricidad es igual al radio de  $D$ . El **centro** de  $D$  es la subgráfica de  $D$  inducida por el conjunto de vértices centrales, es decir:

$$Cen(D) = D[\{v \in V(D) \mid e(v) = rad(D)\}].$$

Dada una digráfica fuerte  $D$ , un subconjunto  $S \subset V(D)$  es un **conjunto de separación** o **conjunto separador** si  $D - S$  no es fuerte. Así, una digráfica  $D$  es  **$k$ -fuertemente conexa** (o simplemente  **$k$ -fuerte**) si es de orden al menos  $k + 1$  y  $D$  no contiene conjunto de separación con menos de  $k$  vértices. De la definición de conexidad fuerte se sigue que una digráfica completa con  $n$  vértices es  $(n - 1)$ -fuerte, pero no  $n$ -fuerte.

El **número de conexidad fuerte de  $D$** , en símbolos  $\kappa(D)$ , es el mayor entero  $k$  tal que  $D$  es  $k$ -fuerte. Si una digráfica  $D$  no es fuerte, entonces  $\kappa(D) = 0$ . Dados dos vértices distintos  $s, t$  de una digráfica  $D$ , un conjunto  $S \subseteq V(D) \setminus \{s, t\}$  es un  $(s, t)$ -**conjunto de separación** si  $D - S$  no tiene  $(s, t)$ -trayectorias.

También se puede hablar de la conexidad en términos de los arcos. Para una digráfica fuerte  $D$ , un conjunto de arcos  $W \subseteq A(D)$  es un **conjunto de corte** si  $D - W$  no es fuerte. Una digráfica  $D$  es  **$k$ -arista fuerte** si  $D$  no contiene un conjunto de corte con menos de  $k$  aristas. El mayor entero  $k$  tal que  $D$  es  $k$ -arista fuerte es la **conexidad por aristas fuerte** de  $D$  (que se denota con  $\lambda(D)$ ). Si  $D$  no es fuerte, escribimos  $\lambda(D) = 0$ .

**Proposición 8.2.1.** Sea  $D$  una digráfica y  $k \geq 1$ , entonces  $\lambda(D) \geq k$  si y sólo si para todo  $X \subset V(D)$ ,  $d^+(X), d^-(X) \geq k$ .

*Demostración. Tarea.* □

Una **componente fuertemente conexa** (o simplemente **componente fuerte**) de una digráfica  $D$  es una subdigráfica inducida maximal respecto a la propiedad de ser fuerte. Si  $D_1, \dots, D_t$  son las componentes fuertemente conexas de  $D$ , entonces  $V(D) = V(D_1) \cup \dots \cup V(D_t)$ . Más aún,  $V(D_i) \cap V(D_j) = \emptyset$  para cualesquiera  $i \neq j$ , de lo contrario, todos los vértices  $V(D_i) \cup V(D_j)$  son alcanzables desde cualquier otro, implicando que los vértices de  $V(D_i) \cup V(D_j)$  pertenecen a una misma componente fuertemente conexa. A  $V(D_1) \cup \dots \cup V(D_t)$  se le conoce como la **descomposición fuerte** de  $D$ . La **digráfica de componentes fuertes** de  $D$ ,  $SC(D)$ , se obtiene al contraer las componentes fuertes de  $D$  y eliminar cualquier arco paralelo que se genere en este proceso. En otras palabras, si  $D_1, \dots, D_t$  son las componentes fuertes de  $D$ , entonces  $V(SC(D)) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$  y  $A(SC(D)) = \{(v_i, v_j) \mid (V(D_i) \rightarrow V(D_j))_D \neq \emptyset\}$ .

Notemos que cualquier subdigráfica de  $D$  inducida por los vértices de un ciclo es fuerte, de manera que está contenida en una componente fuerte de  $D$ . Por lo tanto,  $SC(D)$  es acíclica. De manera que, de acuerdo con la Proposición 8.1.1, los vértices de  $SC(D)$  tienen un orden acíclico. Esto implica que las componentes conexas de  $D$  puede ser etiquetadas  $D_1, \dots, D_t$  de tal manera que no haya arcos de  $D_j$  a  $D_i$  a menos de que  $j < i$ . Las componentes fuertes de  $D$  correspondientes a los vértices de  $SC(D)$  de in grado (ex grado) cero son las **componentes fuertes iniciales (terminales)** de  $D$ . A las demás componentes fuertes de  $D$  les llamaremos **componentes fuerte intermedias** de  $D$ .

**Definición 8.2.4.** Una digráfica  $D$  es **unilateral** si, para cualesquiera dos

vértices distintos  $x, y \in V(D)$ ,  $x$  es alcanzable desde  $y$  en  $D$  o  $y$  es alcanzable desde  $x$  en  $D$  (o ambos).

Claramente toda digráfica fuerte es unilateral. A continuación enunciamos una caracterización de las digráficas unilaterales.

**Proposición 8.2.2.** Una digráfica  $D$  es unilateral si y sólo si existe un único orden acíclico  $D_1, D_2, \dots, D_t$  de las componentes fuertes de  $D$  y  $(V(D_i) \rightarrow V(D_{i+1}))_D \neq \emptyset$  para cualquier  $i \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ .

*Demostración.* Es claro cómo las hipótesis de esta proposición son suficientes para que una digráfica sea unilateral ya que para cualesquiera dos vértices  $x, y$ , o están en una misma componente fuerte, en cuyo caso existe tanto una  $(x, y)$ -trayectoria como una  $(y, x)$ -trayectoria, o están en distintas, digamos  $D_i, D_j$ , respectivamente. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $i < j$ , así, de acuerdo con la hipótesis existe una  $(x, y)$ -trayectoria, que va de la componente  $D_i$ , pasa por  $D_{i+1}$  y así sucesivamente hasta llegar a  $D_j$ .

Probemos ahora la necesidad. Obsérvese que, al ser  $D_1, D_2, \dots, D_t$  un orden acíclico, si  $(V(D_i) \rightarrow V(D_{i+1}))_D = \emptyset$ , entonces ningún vértice de  $V(D_{i+1})$  es alcanzable desde ningún vértice de  $V(D_i)$  y viceversa. Finalmente, obsérvese que, si  $(V(D_i) \rightarrow V(D_{i+1}))_D \neq \emptyset$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ , entonces  $SC(D)$  es trazable y por lo tanto  $D_1, D_2, \dots, D_t$  es el único orden acíclico de las componentes fuertes de  $D$  (Corolario 8.1.2).  $\square$

### 8.3. Digráficas fuertemente conexas

En esta sección estudiamos más a profundidad las propiedades que satisfacen las digráficas fuertemente conexas.

**Teorema 8.3.1.** Una digráfica  $D$  es fuerte si y sólo si  $D$  contiene un camino generador cerrado.

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica fuerte con conjunto de vértices  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Como  $D$  es fuerte, para cada par de vértices existe una trayectoria dirigida en ambos sentidos, así, denotemos con  $P_i$  a una trayectoria de  $v_i$  a  $v_{i+1}$ , para todo  $1 \leq i \leq n-1$  y sea  $P_n$  una  $(v_n, v_1)$ -trayectoria. El camino que consta de la concatenación de todas estas trayectorias,  $W : P_1 P_2 \dots P_n$ , es un camino generador cerrado.

Por otro lado, supongamos que  $D$  contiene un camino generador cerrado:

$$W : (w_1, w_2, \dots, w_k, w_1).$$

Y sean  $u, v \in V(D)$ . Así,  $u = w_i$  y  $v = w_j$  para algunos  $1 \leq i, j \leq k$  e  $i \neq j$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $i < j$ . de manera que  $(w_i, w_{i+1}, \dots, w_{j-1}, w_j)$  es un  $(u, v)$ -camino en  $D$  y  $(w_j, w_{j+1}, \dots, w_k, w_1, w_2, \dots, w_i)$  es un  $(v, u)$ -camino en  $D$ . Por lo tanto, de acuerdo con el Lema 8.1.1,  $D$  contiene tanto una  $(u, v)$ -trayectoria como una  $(v, u)$ -trayectoria. Es decir,  $D$  es fuertemente conexa.  $\square$

**Teorema 8.3.2** (Teorema de Robbin). Una gráfica  $G$  no trivial tiene una orientación fuertemente conexa si y sólo si  $G$  es 2-arista-conexa.

*Demostración.* Es claro que si  $G$  tiene una orientación fuerte, no es posible que tenga un puente, por lo tanto la primera parte de la afirmación es inmediata.

Supongamos que la otra implicación es falsa. Sea entonces  $G$  una gráfica 2-arista-conexa para la cual no existe alguna orientación fuerte. Dentro de todas las subgráficas de  $G$ , sea  $H$  una con el mayor orden posible y que sea fuertemente orientable. Dicha subgráfica existe ya que para cada vértice  $v$  de  $G$  la subgráfica  $G[\{v\}]$  admite, de manera trivial, una orientación fuerte. Como  $G$  no tiene una orientación fuerte,  $|V(H)| < |V(G)|$ . Asígnense direcciones a las aristas de  $H$  de manera que la digráfica resultante,  $D$ , sea fuerte y déjen-se las aristas de  $G - A(H)$  sin orientar. Sean  $u \in V(H)$  y  $v \in V(G) \setminus V(H)$ . Como  $G$  es 2-arista-conexa,  $G$  contiene dos  $(u, v)$ -trayectorias ajenas en aristas. Sea  $P$  una de estas dos  $(u, v)$ -trayectorias y sea  $Q$  la  $(v, u)$ -trayectoria que resulta de la otra  $(u, v)$ -trayectoria. Más aún, sea  $u_1$  el último vértice de  $P$  que pertenece a  $H$  y  $v_1$  el primer vértice de  $Q$  que pertenece a  $H$ . Luego, sea  $P_1$  la  $(u_1, v)$ -subtrayectoria de  $P$  y sea  $Q_1$  la  $(v, v_1)$ -subtrayectoria de  $Q$ . Asígnenseles a las aristas de  $P_1$  la orientación de  $u_1$  a  $v$ , de manera que se produzca una  $(u_1, v)$ -trayectoria dirigida  $P'_1$  y asígnenseles a las aristas de  $Q_1$  la orientación de  $v$  a  $v_1$ , de manera que se produzca una  $(v, v_1)$ -trayectoria dirigida  $Q'_1$ .

Defínase la digráfica  $D'$  como

$$V(D') = V(D) \cup V(P'_1) \cup V(Q'_1) \quad \text{y} \quad A(D') = A(D) \cup A(P'_1) \cup A(Q'_1).$$

Como  $D$  es fuerte,  $D'$  también lo es, en contradicción con la elección de  $H$ .  $\square$

**Corolario 8.3.1.** Una digráfica fuerte,  $D$ , tiene una orientación fuerte si y sólo si  $SG(D)$  es 2-arista-conexa.

## 8.4. Digráficas Eulerianas

Las gráficas Eulerianas y las Hamiltonianas tienen su analogía natural en digráficas. Un **paseo Euleriano** en una digráfica conexa  $D$  es un paseo que contiene a todos los arcos de  $D$ . Un **circuito Euleriano** es un paseo Euleriano cerrado. Una **digráfica Euleriana** es **Euleriana** si contiene un circuito Euleriano.

Se tiene una caracterización de las digráficas Eulerianas, similar a la de las gráficas Eulerianas.

**Teorema 8.4.1.** Sea  $D$  una digráfica conexa y no trivial. Entonces  $D$  es Euleriana si y sólo si  $d^+(v) = d^-(v)$  para cualquier  $v \in V(D)$ .

**Teorema 8.4.2.** Sea  $D$  una digráfica conexa y no trivial.  $D$  contiene un paseo Euleriano si y sólo si  $D$  contiene a lo más dos vértices  $u$  y  $v$  tales que

$$d^+(u) = d^-(u) + 1 \text{ y } d^-(v) = d^+(v) + 1,$$

mientras que para todos los demás vértices  $w$  de  $D$ ,  $d^+(w) = d^-(w)$ . Más aún, cada paseo Euleriano de  $D$  empieza en  $u$  y termina en  $v$ .

**Teorema 8.4.3.** Si  $D$  es una digráfica conexa con dos vértices  $u, v$  tales que

$$d^+(u) = d^-(u) + k \text{ y } d^-(v) = d^+(v) + k$$

para algún entero positivo  $k$  y  $d^+(w) = d^-(w)$  para cualquier otro vértice de  $D$ , entonces  $D$  contiene  $k$   $(u, v)$ -trayectorias ajenas por aristas.

*Demostración.* Sea  $D'$  la digráfica construida al agregar a  $D$   $k$  nuevos vértices  $w_1, w_2, \dots, w_k$  y los  $2k$  arcos  $(v, w_i)$  y  $(w_i, u)$  para todo  $1 \leq i \leq k$ . Como  $d_{D'}^+(x) = d_{D'}^-(x)$  para todo vértice  $x$  de  $D'$ , ésta es Euleriana y por lo tanto contiene un circuito Euleriano  $C$ . Podemos asumir que  $C$  empieza (y termina) en  $u$ , digamos  $C = (u = x_1, x_2, \dots, x_{l-1}, x_l = u)$ . Denotemos con  $w_{i_1}$  al primer elemento de  $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  que aparece en  $C$  y así sucesivamente hasta  $w_{i_k}$ , el último elemento que los  $w_i$  que aparece en  $C$ .

De esta manera, de acuerdo con la construcción de  $D'$ , la sucesión

$$C' = (u, \dots, v, w_{i_1}, u, \dots, v, w_{i_2}, u, \dots, v, w_{i_k}, u)$$

es un subpaseo de  $C$  que contiene  $k$   $(u, v)$ -paseos ajenos en arcos. Por lo tanto, para cada uno de estos  $(u, v)$ -paseos,  $P$ , existe una  $(u, v)$ -trayectoria cuyos arcos pertenecen a  $P$  (Teorema 8.1.1). Como ninguna de estas trayectorias contiene alguno de los vértices  $w_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ),  $D$  contiene  $k$   $(u, v)$ -trayectorias ajenas en arcos.  $\square$

## 8.5. Digráficas Hamiltonianas

Sea  $D$  una digráfica. Un *ciclo Hamiltoniano* de  $D$  es un ciclo generador. Una digráfica  $D$  es *Hamiltoniana* si contiene un ciclo hamiltoniano. Y se dice que una digráfica  $D$  es *trazable* si contiene una trayectoria Hamiltoniana. Al igual que sucede con las gráficas Hamiltonianas, no existe una caracterización para las digráficas Hamiltonianas.

**Teorema 8.5.1.** Todo torneo es trazable.

*Demostración.* Sea  $T$  un torneo con conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Supongamos que los vértices de  $T$  están etiquetados de manera que el número de arcos de la forma  $(v_j, v_i)$ , con  $j > i$ , es mínimo. Entonces,  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  es una trayectoria Hamiltoniana en  $T$ .

Si éste no fuera el caso, existe un subíndice  $i < n$  tal que  $(v_i, v_{i+1}) \notin A(T)$ . Lo cual implica que  $(v_{i+1}, v_i) \in A(T)$ , ya que  $T$  es un torneo. En ese caso se pueden intercambiar los vértices  $v_i$  y  $v_{i+1}$  en el etiquetamiento y reducir el número de arcos de la forma  $(v_j, v_i)$ , con  $j > i$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Teorema 8.5.2** (Teorema de Moon). Sea  $T$  un torneo fuerte de orden  $n \geq 3$ . Para todo  $x \in V(T)$  y todo entero  $k \in \{3, 4, \dots, n\}$ , existe en  $T$  un  $k$ -ciclo que contiene a  $x$ .

*Demostración.* Sea  $x$  un vértice en un torneo fuerte  $T$  de orden  $n \geq 3$ . La prueba del teorema la haremos por inducción sobre  $k$ . Primero probemos que  $T$  contiene un 3-ciclo que contiene a  $x$ . Como  $T$  es fuerte, tanto  $O := N_T^+(x)$ , como  $I := N_T^-(x)$  son distintos del vacío. Más aún,  $(O \rightarrow I)_T \neq \emptyset$ . Sea  $(y, z) \in (O \rightarrow I)_T$ . Entonces,  $(x, y, z, x)$  es un 3-ciclo que contiene a  $x$ .

Sea  $C = (x = x_0, x_1, \dots, x_t = x)$  un ciclo en  $T$  con  $3 \leq t < n$ . Probaremos entonces que  $T$  tiene un  $(t + 1)$ -ciclo que contiene a  $x$ .

Si existe  $y \in V(T) \setminus V(C)$  que domina a un vértice en  $C$  y que es dominado por un vértice en  $C$ , entonces es fácil de ver que existe un índice  $i$  tal que  $x_i \rightarrow y$  y  $y \rightarrow x_{i+1}$ . Por lo tanto,  $x_0 C x_i y x_{i+1} C x_t$  es un  $(t + 1)$ -ciclo que contiene a  $x$ . Supongamos entonces que todo vértice fuera de  $C$  o domina a todo vértice de  $C$  o es dominado por todo vértice de  $C$ . Sea  $R$  el conjunto de vértices en  $V(T) \setminus V(C)$  que dominan a todos los vértices en  $V(C)$  y sea  $S$  el resto de los vértices de  $V(T) \setminus V(C)$ . Como  $T$  es fuerte, tanto  $S$  como  $R$  son distintos del vacío y el conjunto  $(S \rightarrow R)_T$  no es vacío. Por lo tanto, tomando  $(s, r) \in (S \rightarrow R)_T$  vemos que  $x_0 s r x_2 C x_0$  es un  $(t + 1)$ -ciclo que contiene a  $x = x_0$ .  $\square$

**Corolario 8.5.1** (Teorema de Camion). Un torneo es Hamiltoniano si y sólo si es fuerte.

**Definición 8.5.1.** Una digráfica  $D$  de orden  $n \geq 3$  es **pancíclica** si contiene un ciclo de cualquier longitud posible, esto es, si  $D$  contiene un ciclo de longitud  $\ell$  para todo  $\ell \in \{3, 4, \dots, n\}$ ; y es **pancíclica por vértices** si todo vértice  $v$  de  $D$  pertenece a un  $\ell$ -ciclo, para todo  $\ell \in \{3, 4, \dots, n\}$ .

De manera que el teorema anterior afirma que todo torneo fuerte y no trivial es pancíclico por vértices.

**Teorema 8.5.3** (Teorema de Meyniel). Si  $D$  es una digráfica fuertemente conexa y no trivial de orden  $n$  tal que

$$d(u) + d(v) \geq 2n - 1,$$

para todo par  $u, v$  de vértices no adyacentes, entonces  $D$  es Hamiltoniana.

El teorema de Meyniel se obtiene como consecuencia del teorema que se enuncia a continuación. Este resultado es presentado por J. A. Bondy y C. Thomassen en el artículo titulado *A Short proof of Meyniel's theorem*.

**Lema 8.5.1.** Sea  $P : v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$  una trayectoria dirigida en una digráfica  $D$ , y sea  $v \in V(D) \setminus V(P)$ . Si  $D$  no contiene una  $(v_1, v_k)$ -trayectoria con conjunto de vértices  $V(P) \cup \{v\}$ , entonces

$$|(\{v\}, V(P))_D| \leq k + 1.$$

*Demostración.* Para cada  $i$ ,  $1 \leq i < k - 1$  se tiene que

$$|(\{v_i\} \rightarrow \{v\})_D| + |(\{v\} \rightarrow \{v_{i+1}\})| \leq 1.$$

Entonces,

$$|(\{v\}, V(P))_D| \leq 2 + \sum_{i=1}^{k-1} |(\{v_i\}, \{v\})| + |(\{v\}, \{v_{i+1}\})| \leq k + 1.$$

□

**Teorema 8.5.4.** Sea  $D$  una digráfica fuerte y no hamiltoniana y sea  $S = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)$  un ciclo en  $D$  tal que ningún ciclo en  $D$  contiene a  $V(S)$  como subconjunto propio. Entonces,  $D$  contiene un vértice  $v \notin S$  y existen números  $\alpha, \beta$ , con  $1 \leq \alpha \leq k$ ,  $1 \leq \beta < k$ , tales que

i)  $(x_\alpha, v) \in A(D)$ ,

ii)  $v$  no es adyacente a  $x_{\alpha+i}$  para todo  $1 \leq i \leq \beta$ ,

$$\text{iii) } d(v) + d(x_{\alpha+\beta}) \leq 2n - 1 - \beta.$$

*Demostración.* Supongamos primero que no existe en  $D$  alguna  $V(S)$ -trayectoria. Entonces, como  $D$  es fuerte y  $V(S)$  es un subconjunto propio de  $V(D)$ ,  $D$  contiene un ciclo dirigido  $S'$  que tiene exactamente un vértice, digamos  $x_\alpha$ , en común con  $S$ .

Sea  $v$  el sucesor de  $x_\alpha$  en  $S'$ . Si  $D$  contiene una trayectoria de la forma

$$x_{\alpha+1} \rightarrow y \rightarrow v \quad \text{o} \quad v \rightarrow y \rightarrow x_{\alpha+1},$$

con  $y \in V(D) \setminus V(S)$ , entonces claramente se obtiene una contradicción con el supuesto de que  $D$  no tiene  $V(S)$ -trayectorias. Por lo tanto, podemos asumir que no existen tales trayectorias.

Así mismo, podemos asumir que  $v$  no es adyacente a algún vértice de  $S$  que no sea  $x_\alpha$ .

Por lo tanto:

$$d(v) + d(x_{\alpha+1}) \leq 2 + 2(k-1) + \sum_{y \in V \setminus V(S)} |(\{y\}, \{x_{\alpha+1}, v\})_D| \leq 2k + 2(n-k-1) = 2n-2.$$

Con lo cual, se tiene la prueba del teorema, con  $\beta = 1$ .

Supongamos entonces que  $D$  contiene una  $V(S)$ -trayectoria

$$P : x_\alpha \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow y_s \rightarrow x_{\alpha+\gamma}.$$

Selecciona dicha trayectoria de tal manera que  $\gamma$  sea mínimo. De acuerdo con la maximalidad de  $S$ ,  $\gamma > 1$ . Sea  $v = y_1$ , de acuerdo con la maximalidad de  $S$  y con el Lema 8.5.1, se tiene que

- (1)  $v$  está unido a la trayectoria  $x_{\alpha+\gamma} \rightarrow x_{\alpha+\gamma+1} \rightarrow \cdots \rightarrow x_\alpha$  por a lo más  $k - \gamma + 2$  arcos.

Y debido a la minimalidad de  $\gamma$  se tiene que

- (2) para todo  $1 \leq i < \gamma$ ,  $v$  no es adyacente a  $x_{\alpha+i}$  y  $D$  no contiene trayectoria alguna de la forma  $x_{\alpha+i} \rightarrow y \rightarrow v$  o  $v \rightarrow y \rightarrow x_{\alpha+i}$ , con  $y \in V \setminus V(S)$  y  $1 \leq i < \gamma$ .

Ahora, sea  $\beta$  el mayor entero  $i$  ( $1 \leq i \leq \gamma$ ), tal que  $D$  contiene una  $(x_{\alpha+\gamma}, x_\alpha)$ -trayectoria con conjunto de vértices  $\{x_{\alpha+\gamma}, x_{\alpha+\gamma+1}, \dots, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha+i-1}\}$  y sea  $P'$  una  $(x_{\alpha+\gamma}, x_\alpha)$ -trayectoria con ese conjunto de vértices (es posible que  $\beta = 1$ ). Como  $P \cup P'$  es un ciclo, se sigue de la maximalidad de  $S$  que  $\beta < \gamma$ .

De acuerdo con el Lema 8.5.1,  $x_{\alpha+\beta}$  está conectado a  $P'$  por a lo más  $k - \gamma + \beta + 1$  arcos. Combinando este hecho con (1) y (2) se tiene que

$$\begin{aligned} d(v) + d(x_{\alpha+\beta}) &\leq (k - \gamma + 2) + (k - \gamma + \beta + 1) + 2(\gamma - \beta - 1) + \\ &\quad + \sum_{y \in V \setminus V(S)} |(\{y\}, \{v, x_{\alpha+\beta}\})_D| \\ &\leq 2k - \beta + 1 + 2(n - k - 1) = 2n - 1 - \beta. \end{aligned}$$

□

El teorema 8.5.3 tiene muchas consecuencias. A continuación mencionamos algunas de estas consecuencias, empezando por un resultado originalmente descubierto por Douglas Woodall.

**Corolario 8.5.2.** Si  $D$  es una digráfica no trivial de orden  $n$  tal que

$$d^+(u) + d^-(v) \geq n$$

para todo par  $u$  y  $v$  de vértices distintos y  $(u, v) \notin A(D)$ , entonces  $D$  es Hamiltoniana.

El siguiente teorema es de Alain Ghouila-Houri y su demostración es una consecuencia inmediata del Teorema 8.5.3.

**Corolario 8.5.3.** Si  $D$  es una digráfica fuerte de orden  $n$  tal que  $d(v) \geq n$  para todo vértice  $v$  de  $D$ , entonces  $D$  es Hamiltoniana.

El Corolario 8.5.3 tiene a su vez un corolario que probamos a continuación.

**Corolario 8.5.4.** Si  $D$  es una digráfica de orden  $n$  tal que

$$d^+(v) \geq n/2 \text{ y } d^-(v) \geq n/2,$$

para todo  $v \in V(D)$ , entonces  $D$  es Hamiltoniana.

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que la afirmación es falsa. Sin embargo, como ésta es claramente verdadera para  $n = 2$  y  $n = 3$ , existe algún entero  $n \geq 4$  y una digráfica  $D$  de orden  $n$  que satisface la hipótesis pero que no es Hamiltoniana. Sea  $C$  un ciclo en  $D$  del mayor tamaño posible, digamos  $k$ . De acuerdo con el Teorema 8.1.2 y con el supuesto de que  $D$  no es Hamiltoniana,  $1 + n/2 \leq k < n$ . También, sea  $P$  una trayectoria de longitud máxima tal que ningún vértice de  $P$  pertenece a  $C$ . Digamos,  $P$  una  $(u, v)$ -trayectoria de longitud  $\ell \geq 0$ . Por lo tanto,  $k + \ell + 1 \leq n$ .

Como

$$\ell \leq n - k - 1 \leq n - \left(1 + \frac{n}{2}\right) - 1 = \frac{n}{2} - 2,$$

se sigue que  $\ell \leq n/2 - 2$  y que hay al menos dos vértices en  $C$  que dominan a  $u$  y al menos dos vértices dominados por  $v$ . Sea  $a$  el número de vértices en  $C$  que dominan a  $u$ . Entonces  $a \geq 2$ . Para todo vértice  $x$  en  $C$  que domina a  $u$ , los  $\ell + 1$  vértices que inmediatamente siguen a  $x$  en  $C$  no son dominados por  $v$ , de lo contrario,  $D$  tiene un ciclo de longitud mayor que  $k$ . Como  $C$  contiene vértices dominados por  $v$ , debe de existir un vértice  $y$  en  $C$  que domina a  $u$  tal que ninguno de los  $\ell + 1$  vértices que inmediatamente siguen a  $y$  en  $C$  dominen a  $u$  o sean dominados por  $v$ .

Para cada uno de los  $a - 1$  vértices en  $C$  que son distintos a  $y$  y que dominan a  $u$ , el vértice inmediatamente posterior a éste no puede ser dominado por  $v$ . Por lo tanto, al menos  $(a - 1) + (\ell + 1) = a + \ell$  vértices en  $C$  no son dominados por  $v$ , de lo contrario, nuevamente,  $D$  tiene un ciclo de longitud mayor a  $k$ . Como  $P$  es la mayor trayectoria en  $D$  que no contiene vértices de  $C$ , todo vértice adyacente a  $u$  está en  $C$  o en  $P$ .

Como  $d^-(u) \geq n/2$  y los únicos vértices de  $D$  que pueden dominar a  $u$  pertenecen a  $C$  o a  $P$ , se sigue que  $a + \ell \geq n/2$ . Por lo tanto,  $v$  domina a lo más a  $(n - 1) - (a + \ell) \leq (n - 1) - n/2 = n/2 - 1$  vértices, en contradicción con la hipótesis.  $\square$

## 8.6. Torneos

Los torneos son una familia muy importante y estudiada en el área de las digráficas.

### 8.6.1. Torneos Transitivos

**Definición 8.6.1.** Un torneo  $T$  es **transitivo** si siempre que  $(u, v), (v, w) \in A(T)$ , entonces  $(u, w) \in A(T)$ .

**Teorema 8.6.1.** Un torneo es transitivo si y sólo si es acíclico.

*Demostración.* Sea  $T$  un torneo transitivo y supongamos que  $T$  contiene un ciclo  $C = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_1)$ , con  $k \geq 3$ . De acuerdo con la hipótesis, como  $(x_1, x_2), (x_2, x_3) \in A(T)$ ,  $(x_1, x_3) \in A(T)$ ; de manera que  $(x_1, x_4)$  también es un arco de  $T$ . Bajo este mismo razonamiento se tiene finalmente que  $(x_1, x_k)$  es un arco de  $T$ , lo cual es imposible ya que  $(x_k, x_1) \in A(T)$ .

Ahora, sea  $T$  un torneo acíclico, veamos que éste es transitivo. Sean  $(u, v), (v, w) \in A(T)$ . Como  $T$  es acíclico,  $(w, u) \notin A(T)$ , lo cual, junto con

el hecho de que  $T$  es un torneo, implica que  $(u, w) \in A(T)$ . Por lo tanto  $T$  es transitivo.  $\square$

Como corolario del Teorema 8.5.1 se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 8.6.1.** Todo torneo transitivo contiene exactamente una trayectoria Hamiltoniana.

*Demostración. Tarea.*  $\square$

Una sucesión  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de enteros no negativos es una **sucesión de grados de un torneo** si existe un torneo  $T$  de orden  $n$  cuyos vértices pueden ser etiquetados como  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de manera que  $d_T^+(v_i) = s_i$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ .

Los torneos transitivos se pueden caracterizar en términos de su sucesión de grados.

**Teorema 8.6.2.** Una sucesión no decreciente  $\pi$  de enteros no negativos es una sucesión de grados de un torneo transitivo si y sólo si  $\pi$  es la sucesión  $0, 1, \dots, n-1$ .

*Demostración.* Primero veamos que  $\pi : 0, 1, \dots, n-1$  es sucesión de grados de un torneo transitivo de orden  $n$ . Sea  $T$  un torneo con conjunto de vértices  $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y conjunto de arcos  $A(T) = \{(v_i, v_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ . Se afirma entonces que  $T$  es un torneo transitivo. Para probar esto, sean  $(v_i, v_j), (v_j, v_k) \in A(T)$ , de manera que  $1 \leq i < j < k \leq n$ , lo cual implica que  $1 \leq i < k \leq n$ , en consecuencia  $(v_i, v_k) \in A(T)$ . Además, para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $d^+(v_i) = n - i$ . Por lo tanto,  $\pi$  es una sucesión de grados de  $T$ .

Ahora, sea  $T$  un torneo transitivo de orden  $n$ , veamos que  $0, 1, \dots, n-1$  es una sucesión de grados de  $T$ . Notemos que esta afirmación equivale a que cualesquiera dos vértices distintos de  $T$  tienen diferente ex grado. Sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $T$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $(u, v) \in A(T)$ . Si  $v$  no tiene ex vecinos, entonces  $d^+(u) \neq d^+(v)$ . Y, si  $w$  es un ex vecino de  $v$ , de acuerdo con la transitividad de  $T$  se tiene que  $w \in N^+(u)$ . De manera que  $N^+(v) \subset N^+(u)$  y en consecuencia  $d^+(u) > d^+(v)$ . En cualquier caso  $u$  y  $v$  tienen grados distintos.  $\square$

Este teorema prueba que la estructura de un torneo transitivo está determinado de forma única.

**Corolario 8.6.1.** Para todo entero positivo  $n$ , existe exactamente un torneo transitivo de orden  $n$ .

Combinando este último corolario con el Teorema 8.6.1 se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 8.6.2.** Para todo entero positivo  $n$ , existe exactamente un torneo acíclico de orden  $n$ .

**Teorema 8.6.3.** Si  $T$  es un torneo con exactamente  $k$  componentes, entonces  $SC(T)$  es el torneo transitivo de orden  $k$ .

*Demostración. Tarea.* □

### 8.6.2. Distancia en Torneos

Los torneos son digráficas en las cuales hay vértices que están cerca de todos los vértices del torneo.

**Teorema 8.6.4.** Si  $u$  es un vértice de ex grado máximo en un torneo no trivial  $T$ , entonces para todo vértice  $v$  de  $T$ ,  $\vec{d}(u, v) \leq 2$ .

*Demostración.* Sea  $v \in V(T) \setminus \{u\}$ . Si  $(u, v) \in A(T)$ , entonces  $\vec{d}(u, v) = 1 \leq 2$ . Supongamos entonces que  $(u, v) \notin A(T)$ , de manera que  $(v, u) \in A(T)$ . Luego, como el ex grado de  $u$  es máximo, debe de existir otro vértice  $w$  ex vecino de  $u$  pero que no sea ex vecino de  $v$ , de lo contrario  $v$  tendría ex grado estrictamente mayor al de  $u$  puesto que  $u \in N^+(u)$ . Así, como  $T$  es un torneo,  $(u, w), (w, v) \in A(T)$ , es decir,  $\vec{d}(u, v) = 2$ . □

**Corolario 8.6.3.** Todo torneo fuerte y no trivial tiene radio 2.

*Demostración. Tarea.* □

**Teorema 8.6.5.** El centro de todo torneo fuerte y no trivial contiene al menos tres vértices.

*Demostración.* Sea  $T$  un torneo fuerte y no trivial. De acuerdo con el Corolario anterior,  $rad(T) = 2$ . Sea  $w$  un vértice de excentricidad 2. Como  $T$  es un torneo fuerte,  $N^-(w) \neq \emptyset$ ; sea  $v$  un in vecino de  $w$  con el mayor ex grado posible. Así mismo  $N^-(v) \neq \emptyset$ ; sea  $u$  un in vecino de  $v$  con el mayor ex grado posible. Veamos entonces que tanto  $u$  como  $v$  tienen excentricidad 2, con lo cual se completa la prueba.

Supongamos lo contrario, es decir, que alguno de los dos vértices,  $u, v$ , no tiene excentricidad 2. Sea  $x \in \{u, v\}$  tal que  $e(x) \geq 3$ . En consecuencia, existe un vértice  $y$  en  $T$  tal que  $\vec{d}(x, y) \geq 3$ . Entonces,  $(y, x) \in A(T)$ . Más aún,  $y$  es in vecino de cualquier ex vecino de  $x$ , de manera que  $N^+(x) \subset N^+(y)$  y en consecuencia  $d^+(y) > d^+(x)$ .

Si  $x = v$ , como  $(x, w) \in A(T)$  y  $\vec{d}(v, y) \geq 3$ , se sigue que  $(y, w) \in A(T)$ . Así,  $d^+(y) > d^+(v)$ , en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto,  $x = u$ . En

este caso, al ser  $(x, v)$  una arista de  $T$  se tiene que  $(y, v)$  también lo es, pero como  $d^+(y) > d^+(x) = d^+(u)$ , se llega a una contradicción con la propiedad inicial de  $u$ . En cualquier caso se obtiene una contradicción, en consecuencia tanto  $u$  como  $v$  tienen excentricidad 2.  $\square$

Observemos que para la demostración de este teorema sólo utilizamos la conexidad fuerte para asegurar que las in vecindades de  $w$  y  $v$ , son distintas del vacío. Además, el Corolario 8.6.3 sólo lo utilizamos para garantizar la existencia de un vértice con excentricidad 2. Es fácil ver entonces que el Teorema 8.6.4 garantiza que todo torneo sin vértices de in grado cero tiene al menos tres vértices que están a distancia al menos dos de los demás vértices del torneo.

### 8.6.3. Reyes en torneos

A los vértices que están cerquita de todos se les llama reyes.

**Definición 8.6.2.** Sea  $T$  un torneo no trivial. Un vértice  $v$  de  $T$  es un **rey** si para cualquier otro vértice  $u$  del torneo,  $\vec{d}(u, v) \leq 2$ .

Así, de acuerdo a lo visto anteriormente sabemos que todo torneo tiene al menos un rey y que si el torneo no contiene vértices de in grado cero, entonces tiene al menos 3 reyes.

**Teorema 8.6.6.** Ningún torneo tiene exactamente 2 reyes.

**Lema 8.6.1.** Sea  $T$  un torneo y  $u \in V(T)$  tal que  $d^-(u) \neq 0$ . Entonces,  $u$  es dominado por un rey.

**Definición 8.6.3.** Sea  $T$  un torneo y  $v \in V(T)$ . Se dice que  $v$  es un emperador de  $T$  si domina a todo otro vértice de  $T$ .

**Teorema 8.6.7.** Un torneo tiene exactamente un rey si y sólo si dicho rey es un emperador.

Sabemos que hay 4 torneos (no isomorfos) de orden 4. Estos tienen o un rey o tres reyes. Lo mismo sucede con los dos torneos de orden 3. Nos preguntamos entonces para qué enteros  $n$  y  $k$  existe un torneo con exactamente  $k$  reyes. Para esto empecemos viendo para qué entero positivo  $n$  existe un torneo de orden  $n$  con  $n$  reyes. De acuerdo con lo anterior, para  $n = 2$  y  $n = 4$  no existen torneos con la propiedad buscada. Veamos que estos son los únicos casos.

**Lema 8.6.2.** Si existe un torneo de orden  $n$  con  $n$  reyes, entonces, existe un torneo de orden  $n + 2$  con  $n + 2$  reyes.

*Demostración.* Supongamos que  $F$  es un torneo de orden  $n$  con  $n$  reyes. Consideremos la digráfica,  $F'$ , obtenida al agregar a  $F$  dos vértices nuevos,  $u$  y  $v$  y flechas nuevas de manera que  $u$  domine a todos los vértices de  $F$ ,  $v$  esté dominado por todos los vértices de  $F$  y  $v$  domine a  $u$ . Es decir:

$$F' = (V(F) \cup \{u, v\}, A(F) \cup \{(u, x) \mid x \in V(F)\} \cup \{(x, v) \mid x \in V(F)\} \cup \{(v, u)\}).$$

Es claro que  $F'$  resulta ser el torneo deseado.  $\square$

**Lema 8.6.3.** Existe un torneo de orden 6 con 6 reyes.

**Teorema 8.6.8.** Para todo  $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{2, 4\}$  existe un torneo de orden  $n$  con exactamente  $n$  reyes.

*Demostración.* Como claramente existe un torneo de orden 1 con exactamente un rey, de manera inductiva, utilizando el Lema 8.6.2 se tiene que para cualquier natural impar  $n$ , existe un torneo de orden  $n$  con exactamente  $n$  reyes. Así mismo, de acuerdo con el Lema 8.6.3 y el Lema 8.6.2, de manera inductiva, se tiene que para cualquier natural par  $n \geq 6$ , existe un torneo de orden  $n$  con exactamente  $n$  reyes. Anteriormente vimos que no existen torneos de orden 4 con 4 reyes ni torneos con exactamente 2 reyes.  $\square$

**Teorema 8.6.9.** Para todo  $n \geq 1$  y todo entero  $k$  ( $n \geq k \geq 1$ ), existe un torneo de orden  $n$  con exactamente  $k$  reyes, con excepción del caso en que  $k = 2$  (independientemente del valor de  $n$ ) y del caso en que  $n = k = 4$ .

*Demostración.* Sea  $k \notin \{2, 4\}$  y  $F$  un torneo de orden  $k$  con exactamente  $k$  reyes (Teorema 8.6.8). Sean  $n > k$  y  $F'$  un torneo ajeno a  $F$ , de orden  $n - k$ . Consideremos la digráfica  $T$  que resulta de la unión de  $F$  y  $F'$  y tal que en  $T$  todo vértice de  $F$  domina a  $F'$ . Es decir:

$$D = (V(F) \cup V(F'), A(F) \cup A(F') \cup (V(F) \times V(F'))).$$

Entonces, los  $k$  vértices de  $F$  son los únicos reyes en  $D$ .

Para  $k = 4$  es suficiente con probar que existe un  $(5, 4)$ -torneo ya que en este caso se puede crear, a partir de éste, un torneo de orden  $n$  con exactamente 4 reyes (para cualquier  $n > 5$ ), al agregar  $n - 5$  vértices nuevos como en el caso anterior.  $\square$

**Definición 8.6.4.** Sea  $D$  una digráfica y  $v \in V(D)$ . Se dice que  $v$  es un  $k$ -rey si para todo otro vértice  $u$  existe una  $(v, u)$ -trayectoria de longitud a lo más  $k$ .

**Teorema 8.6.10.** Todo torneo  $k$ -partito ( $k \geq 2$ ), con a lo más un vértice de in grado cero, contiene un 4-rey.

*Demostración.* Sean  $T$  un torneo  $k$ -partito con a lo más un vértice de in grado cero y  $V_1, V_2, \dots, V_k$  las  $k$ -partes de  $T$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , sea  $v_i$  un vértice de ex grado máximo, con respecto a todos los elementos de  $V_i$ . Sea  $T' = T[\{v_1, v_2, \dots, v_k\}]$  la subdigráfica de  $T$  inducida por estos  $k$  vértices. Es claro entonces que  $T'$  es un torneo. Así, de acuerdo con el Teorema 8.6.4,  $T'$  contiene un rey, digamos  $v_1$ . Afirmamos que  $v_1$  es un rey en  $T$ .

Sea  $u \in V_i$  con  $i \geq 2$ . Si  $u = v_i$ , como  $v_1$  es un rey en  $T'$ ,  $\vec{d}(v_1, v_i) \leq 2$ . Supongamos entonces que  $u \neq v_i$ . Sabemos que existe una  $(v_1, v_i)$ -trayectoria,  $P$ , en  $T'$  de longitud a lo más 2. Si  $T$  tiene a su vez una  $(v_i, u)$ -trayectoria de longitud 2, entonces concatenando ésta con  $P$  se obtiene una trayectoria de  $v_1$  a  $u$  de longitud a lo más 4.

Supongamos entonces que  $T$  no contiene dicha trayectoria. En consecuencia, todo ex vecino de  $v_i$  también lo es de  $u$ , es decir,  $N^+(v_i) \subseteq N^+(u)$ , pero como, en virtud de la elección de  $v_i$ ,  $d^+(v_i) \geq d^+(u)$ , sus vecindades deben ser iguales:

$$N^+(v_i) = N^+(u) \quad \text{y} \quad N^-(v_i) = N^-(u).$$

Sea  $x$  el antecesor de  $v_i$  en  $P$  (puede ser  $v_1$ ). De acuerdo con lo anterior,  $x$  domina a  $u$  y por lo tanto  $P' = (v_1, x, u)$  es una  $(v_1)$ -trayectoria de longitud a lo más dos. En cualquier caso concluimos que si  $u \in V_i$  con  $i \geq 2$ , entonces  $\vec{d}(v_1, u) \leq 4$

Sea  $u \in V_1 \setminus \{v_1\}$ . Si existe en  $T$  una  $(v_1, u)$ -trayectoria de longitud 2, se tiene lo deseado. Supongamos entonces que no existe. Bajo un razonamiento análogo al anterior concluimos que:

$$N^+(v_1) = N^+(u) \quad \text{y} \quad N^-(v_1) = N^-(u).$$

Luego, por la hipótesis inicial, no es posible que los dos vértices tengan in grado cero, existe  $z \in N^-(u) = N^-(v_1)$ , digamos  $z \in V_j$  con  $j \geq 2$ . Ahora, como  $z \in V_j$  con  $j \geq 2$ , de acuerdo con el caso anterior, concluimos que  $T$  tiene una  $(v_1, z)$ -trayectoria de longitud a lo más 4. De todas esas trayectorias, sea  $Q$  una  $(v_1, z)$ -trayectoria de longitud mínima.

Si  $Q$  tiene longitud menor o igual a 3, entonces  $Q$ , junto con la flecha  $(z, u)$  forma una  $(v_1, z)$ -trayectoria de longitud a lo más 4.

Si  $Q = v_1 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow z$  tiene longitud 4, en virtud de su minimalidad,  $y_2$  o  $y_3$  dominan a  $v_1$  (ya que al menos uno de estos dos vértices no está en  $V_1$ ). Es decir, se tiene que  $v_1 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow u$  o  $(v_1 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow u)$  es una  $(v_1, u)$ -trayectoria en  $T$  de longitud a lo más 4.  $\square$

Se tiene también una generalización de este teorema para digráficas multipartitas semi completas<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Una *digráfica multipartita semi completa* es una biorientación de una gráfica

## 8.7. Núcleos

**Definición 8.7.1.** Sean  $k, \ell$  enteros con  $k \geq 2$ ,  $\ell \geq 1$  y  $D = (V, A)$  una digráfica. Un conjunto  $J \subseteq V$  es un  $(k, \ell)$ -**núcleo** si:

- (a) para cualesquiera  $x, y \in J$ , distintos,  $\vec{d}(x, y) \geq k$ ,
- (b) para todo  $z \in V \setminus J$ , existe  $x \in J$  tal que  $\vec{d}(z, x) \leq \ell$ .

En particular, un **núcleo** es un  $(2, 1)$ -núcleo. Notemos que esta definición es equivalente a la siguiente:

**Definición 8.7.2.** Un subconjunto,  $K$ , de vértices en una digráfica  $D = (V, A)$ , es un **núcleo** si es independiente y  $N^-[K] = V$ .

**Definición 8.7.3.** Decimos que una digráfica es **núcleo perfecta** si toda subdigráfica inducida tiene un núcleo. Una digráfica que no es núcleo perfecta es **núcleo imperfecta**. Se dice que una digráfica es **núcleo imperfecta crítica** si es núcleo imperfecta pero toda subdigráfica propia inducida es núcleo perfecta.

Es decir, una digráfica núcleo imperfecta crítica es una digráfica núcleo imperfecta minimal, de manera que toda digráfica núcleo imperfecta contiene una subdigráfica núcleo imperfecta crítica.

**Lema 8.7.1.** Toda digráfica núcleo imperfecta crítica es fuerte.

*Demostración.* Supongamos lo contrario y sea  $D = (V, A)$  una digráfica no fuerte y núcleo imperfecta crítica. Sea  $T$  una componente fuerte terminal en  $D$  y  $S_1$  un núcleo en  $T$ .

Como  $D$  no tiene núcleo, el conjunto  $M = V \setminus N^-[S_1]$  es distinto del vacío. entonces, al  $D$  ser núcleo imperfecta crítica la subdigráfica de  $D$  inducida por  $M$ ,  $D \langle M \rangle$  tiene un núcleo, digamos  $S_2$ .

Observemos que, en virtud de la definición de  $M$  y del ser  $T$  una componente fuerte terminal,  $(S_1, S_2)_D = \emptyset$ . Más aún,  $N^-[S_1 \cup S_2] = V$ . Por lo tanto  $S_1 \cup S_2$  es un núcleo en  $D$ , lo cual es imposible.  $\square$

**Teorema 8.7.1.** Toda digráfica sin ciclos impares es núcleo perfecta.

*Demostración.* Sea  $D$  una digráfica núcleo imperfecta sin ciclos impares. Y sea  $D'$  una subdigráfica de  $D$  núcleo imperfecta crítica. En virtud del lema anterior,  $D'$  es fuerte. Además, como  $D'$  es fuerte y sin ciclos impares,  $D'$  es bipartita, digamos  $(V_1, V_2)$ -partita. Como  $D'$  es fuerte,  $V_1$  es un núcleo en  $D'$ , en contradicción con la hipótesis inicial.  $\square$

---

multipartita completa.

### 8.7.1. Cuasi núcleos

**Definición 8.7.4.** Sea  $D = (V, A)$  una digráfica y  $Q \subseteq V(D)$ . Se dice que  $Q$  es un **cuasi núcleo** en  $D$  si  $Q$  es independiente y para cualquier vértice  $u$  que no esté en  $Q$ , existe un vértice  $v \in Q$  tal que  $\vec{d}(u, v) \leq 2$ .

En otras palabras, un cuasi núcleo es un  $(2, 2)$ -núcleo.

Los dos primeros resultados que vimos para reyes con torneos, se han extendido a cuasi núcleos en digráficas arbitrarias, como veremos a continuación.

**Teorema 8.7.2.** Toda digráfica tiene un cuasi núcleo.

*Demostración.* Sea  $D = (V, A)$  una digráfica. Consideremos el orden  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  y las dos subdigráficas generadoras de  $D$ ,  $D_1 = (V, A_1)$  y  $D_2 = (V, A_2)$ , donde  $A_1 = \{(x_i, x_j) \in A \mid i < j\}$  y  $A_2 = \{(x_i, x_j) \in A \mid i > j\}$ . De acuerdo con el Teorema 8.7.1,  $D_1$  tiene un núcleo,  $K'$  y  $D_2[K']$  tiene un núcleo, digamos  $K''$ . Veamos que  $K''$  es un cuasi núcleo en  $D$ .

Como  $K'' \subseteq K'$ , es claro que  $K''$  es un conjunto independiente. Luego, si  $v \notin K''$ , debe de existir un  $u \in K'$  tal que  $(v, u) \in A$ , puesto que  $K'$  es un núcleo. Si  $u \in K''$ , ya terminamos, de lo contrario, como  $K''$  es un núcleo de  $D_2[K']$ , existe  $w \in K''$  tal que  $(u, w) \in A$ . Por lo tanto,  $\vec{d}(v, w) \leq 2$ , con lo cual concluimos la prueba.  $\square$

**Teorema 8.7.3.** Si una digráfica  $D = (V, A)$  no tiene núcleos, entonces  $D$  contiene al menos tres cuasi núcleos.

*Demostración.* De acuerdo con el teorema anterior,  $D$  contiene un cuasi núcleo,  $Q_1$ . Como  $D$  no tiene núcleos,  $N^-[Q_1] \neq V$ . Sea  $Q_2$  un cuasi núcleo de  $D - N^-[Q_1]$ . Veamos que  $Q'_2 = Q_2 \cup (Q_1 \setminus N^-[Q_2])$  es un cuasi núcleo en  $D$ .

Notemos que  $Q'_2$  es independiente y

$$V = (V - N^-[Q_1]) \cup N^-[Q_1 \cap N^-(Q_2)] \cup N^-[Q_1 \setminus N^-(Q_2)].$$

De acuerdo con la definición de  $Q_2$ , todo vértice de  $V \setminus N^-[Q_1]$  es el vértice inicial de una trayectoria que termina en  $Q_2$ , de longitud a lo más dos. Luego, es claro que cualquier elemento de  $N^-[Q_1 \cap N^-(Q_2)]$  es vértice inicial de una trayectoria que termina en  $Q_2$  y de longitud menor o igual a 2. Como  $N^-[Q_1 \setminus N^-(Q_2)] \subseteq N^-[Q_1]$ , todo vértice de  $N^-[Q_1 \setminus N^-(Q_2)]$  o pertenece a  $Q_1$  o es la cola de un arco cuya cabeza está en  $Q_1 \setminus N^-(Q_2)$ . Por lo tanto,  $Q'_2$  es un cuasi núcleo en  $D$ .

Observemos que  $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$  y  $Q_2 \neq \emptyset$ , entonces  $Q'_2 \neq Q_1$ .

Ahora, como  $Q'_2$  no es un núcleo en  $D$ ,  $V \setminus N^-[Q'_2] \neq \emptyset$ . Sea  $Q_3$  un cuasi núcleo de  $D - N^-[Q'_2]$  y sea  $Q'_3 = Q_3 \cup (Q'_2 \setminus N^-(Q_3))$ .

De manera análoga al caso anterior, podemos demostrar que  $Q'_3$  es un cuasi núcleo en  $D$  y distinto de  $Q'_2$ . Faltaría probar que  $Q'_3 \neq Q_1$ . Obsérvese que  $Q_3 \subseteq V \setminus N^-[Q'_2]$  y  $Q_1 \subseteq N^-[Q'_2]$ . Entonces,  $Q_1 \cap Q_3 = \emptyset$ . De acuerdo con esto último y con el hecho de que  $Q_3 \neq \emptyset$  concluimos finalmente que  $Q'_3 \neq Q_1$ .  $\square$

Veamos que la cota anterior es justa.

**Teorema 8.7.4.** Para todo entero  $n \geq 3$  existe una digráfica de orden  $n$ , sin núcleo que posee exactamente 3 cuasi núcleos.

*Demostración.* Sea  $\tau_3^*$  el torneo fuerte de orden 3 con conjunto de vértices  $\{x_1, x_2, x_3\}$ . Para cada  $n \geq 3$   $\tau_{n+1}^*$  se obtiene a partir de  $\tau_n^*$  al agregar a ésta un vértice nuevo,  $x_{n+1}$  y las flechas  $(x_n, x_{n+1})$  y  $(x_{n+1}, x_i)$  con  $1 \leq i \leq n-1$ . Es fácil ver que  $\tau_n^*$  no contiene núcleo y que  $x_1, x_2, x_3$  son los únicos cuasi núcleos.  $\square$



# Capítulo 9

## Teoría extremal de gráficas

La teoría extremal de gráficas estudia las gráficas extremales (máximas o mínimas) que satisfacen una determinada propiedad. La extremalidad puede ser tomada con respecto a diferentes invariantes de las gráficas (propiedades que dependen únicamente de la estructura no de la representación gráfica), tales como el orden o el tamaño. Es decir, la teoría extremal de gráficas estudia cómo las propiedades globales de una gráfica influyen en las subestructuras locales de la gráfica.

### 9.1. Teorema de Turán y algunos problemas extremales

Empecemos estudiando problemas extremales relacionados con subgráficas prohibidas, cuestiones del tipo: dada una gráfica  $F$ , determinar el máximo número de aristas que puede tener una gráfica de orden  $n$  que no contenga a  $F$  como subgráfica. A este número se le denota como  $ex(n, F)$ . De manera que, toda gráfica de orden  $n$  y tamaño  $ex(n, F)+1$  contiene a  $F$  como subgráfica y si la gráfica tiene tamaño  $ex(n, F)$  no podemos asegurar la existencia de  $F$ . Además, respecto a la propiedad de no contener a  $F$  como subgráfica, una gráfica de orden  $n$  es **extremal** si tiene exactamente  $ex(n, F)$  aristas. Con  $EX(n, F)$  denotamos al conjunto de todas las gráficas extremales.

Por ejemplo, una gráfica acíclica de orden  $n$  tiene a lo más  $n - 1$  aristas y las gráficas extremales de orden  $n$  son los árboles.

El primer resultado de teoría de gráficas perteneciente a la teoría extremal es el teorema de Willem Mantel (1907) sobre el mínimo tamaño posible de una gráfica de orden dado que garantice la existencia de un triángulo.

**Teorema 9.1.1** (Mantel). Si  $G$  es una gráfica de orden  $n \geq 3$  y tamaño

$m > \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  entonces  $G$  contiene un triángulo.

*Demostración.* Supongamos que el teorema es falso. Entonces, sea  $n$  el mínimo entero tal que existe una gráfica de orden  $n \geq 3$  y tamaño  $m > \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  que no contenga triángulos. Por lo tanto, existe alguna gráfica  $G$  de orden  $n \geq 3$  y tamaño  $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$  que no contiene triángulos.

Sean  $uv \in A(G)$  y  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-2}\}$  los demás vértices de  $G$ . Como  $G$  no contiene triángulos, a lo más un vértice de entre  $u$  y  $v$  es adyacente a  $v_i$  para cada  $i$  con  $1 \leq i \leq n-2$ . Esto implica que  $d(u) + d(v) \leq n$ .

Sea  $H = G - v - u$ . Entonces,  $H$  tiene orden  $n-2$  y tamaño  $m'$  donde  $m' > \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1 - (d(u) + d(v) - 1)$  y por lo tanto  $m' \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 2 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + 1$ . Ya que

$$\frac{n^2}{4} - n + 2 = \frac{n^2 - 4n + 4}{4} + 1 = \frac{(n-2)^2}{4} + 1.$$

Por lo tanto  $H$  contiene un triángulo y en consecuencia  $G$ , lo cual es imposible.  $\square$

Este teorema equivale a decir que  $ex(n, K_3) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  y  $EX(n, K_3) = \{K_{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}, \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor\}$ .

Resulta natural buscar la generalización de este problema. Nos preguntamos entonces cuál es el mayor número de aristas que puede tener una gráfica de orden  $n$  que no contenga a  $K_k$  como subgráfica. En los años 1940 Pál Turán obtuvo la respuesta a este problema. Pero antes de enunciar su teorema hagamos la siguiente observación. Es claro que si  $G$  es  $(k-1)$ -partita, no contiene a  $K_k$  como subgráfica ya que toda parte del conjunto de vértices contiene a lo más un vértice de una gráfica completa. Entonces  $ex(n, K_k)$  es al menos tan grande como el tamaño máximo de una gráfica  $(k-1)$ -partita de orden  $n$ .

De hecho, hay únicamente una gráfica  $(k-1)$ -partita de orden  $n$  con tamaño máximo: la gráfica de Turán.

**Definición 9.1.1.** Una gráfica  $k$ -partita completa de orden  $n$  cuyas partes son de igual o casi igual tamaño (esto es  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  o  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ ) es llamada **gráfica de Turán** y se denota como  $T_{n,k}$ .

**Lema 9.1.1.** El tamaño de  $T_{n,k}$  se denota con  $t_{n,k}$ .

- Sea  $G$  una gráfica  $k$ -partita de orden  $n$ , entonces  $|A(G)| \leq t_{n,k}$ .
- $t_{n,k} = \binom{n - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{2} + (k-1) \binom{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1}{2} \geq \left\lfloor \frac{(k-1)n^2}{2k} \right\rfloor$ .

9.1. TEOREMA DE TURÁN Y ALGUNOS PROBLEMAS EXTREMALES 131

*Demostración.* Tarea. □

Sean  $G = (V, A)$  una gráfica y  $X, Y \subseteq V$ . Denotemos con  $A(X, Y) = \{uv \in A \mid u \in X, v \in Y\}$ . En particular, si  $X = Y$ , denotamos con  $A(X)$  al conjunto  $A(X, X)$ .

**Teorema 9.1.2** (Turán). Sea  $G$  una gráfica simple de orden  $n$  y tamaño  $m$  que no contiene a  $K_k$  como subgráfica (con  $k \geq 2$ ). Entonces,  $m \leq t_{n,k-1}$ . Además, la igualdad se da si y sólo si  $G \cong T_{n,k-1}$ .

*Demostración.* La demostración la haremos por inducción sobre  $k$ . Como la única gráfica de orden  $n$  que no contiene a  $K_2$  como subgráfica es  $\overline{K}_n \cong T_{n,1}$ , el resultado se cumple para  $k = 2$ .

Asumamos entonces, que la afirmación es válida para todos los enteros positivos menores que  $k$  y sea  $G = (V, A)$  una gráfica simple que no contiene  $K_k$ . Sean  $x \in V$  de grado máximo,  $X := N(x)$  e  $Y := V \setminus N(x)$ . Entonces,

$$m = |A(X)| + |A(X, Y)| + |A(Y)|.$$

Como  $G$  no contiene a  $K_k$ ,  $G[X]$  no contiene a  $K_{k-1}$ . Por lo tanto, en virtud de la hipótesis de inducción

$$|A(X)| \leq t_{\Delta, k-2}, \tag{9.1}$$

con la igualdad si y sólo si  $G[X] \cong T_{\Delta, k-2}$ .

Es claro que el número de aristas que inciden en  $Y$  es a lo más  $\Delta(n - \Delta)$ . Luego, como toda arista de  $G$  que incide en un vértice de  $Y$  pertenece a  $A(X, Y)$  o a  $A(Y)$ ,

$$|A(X, Y)| + |A(Y)| \leq \Delta(n - \Delta), \tag{9.2}$$

con la igualdad si y sólo si  $Y$  es un conjunto estable cuyos elementos son todos de grado  $\Delta$  (todos adyacentes a cada elemento de  $X$ ).

Consideremos  $H = T_{\Delta, k-2} \vee \overline{K}_{n-\Delta}$ <sup>1</sup>. De acuerdo con (9.1) y (9.2):  $m \leq |A(H)|$ .

Observemos que  $H$  es una gráfica  $(k-1)$ -partita completa, así, de acuerdo con el Lema 9.1.1,  $|A(H)| \leq t_{n, k-1}$ , donde la igualdad se da si y sólo si  $H \cong T_{n, k-1}$ . Entonces  $m \leq t_{n, k-1}$ .

Si  $m = t_{n, k-1}$ , entonces,

$$t_{\Delta, k-2} + \Delta(n - \Delta) \geq |A(X)| + |A(X, Y)| + |A(Y)| = m = t_{n, k-1} = t_{\Delta, k-2} + \Delta(n - \Delta).$$

---

<sup>1</sup>Sean  $G_1 = (V_1, A_1)$  y  $G_2 = (V_2, A_2)$  dos gráficas ajenas.  $G_1 \vee G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2 \cup \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\})$ .

En consecuencia,  $|A(X)| = t_{\Delta, k-2}$  y  $|A(X, Y)| + |A(Y)| = \Delta(n - \Delta)$ . Por lo tanto  $G[X] \cong T_{\Delta, k-2}$  e  $Y$  es un conjunto independiente cuyos vértices son todos de grado  $\Delta$ . Es decir,  $G \cong T_{n, k-1}$ . Con lo cual concluimos finalmente que  $m \leq t_{n, k-1}$  y la igualdad se da si y sólo si  $G \cong T_{n, k-1}$ .  $\square$

**Corolario 9.1.1.** Sean  $k$  y  $n$  enteros tales que  $n \geq k \geq 2$ . El menor tamaño de una gráfica  $G$  de orden  $n$  que garantiza que  $G$  contenga a  $K_k$  es  $t_{n, k-1} + 1$ .

Hasta ahora se conoce  $ex(n, F)$  para cualquier gráfica completa  $K_k$ , pero ¿podemos decir del resto de las gráficas? Al intentar generalizar el Teorema de Turán surge, por ejemplo, la duda de qué sucede con las gráficas bipartitas completas. Esta pregunta se le conoce como el problema de Zarankiewicz. Denotemos con  $G_2(m, n)$  una gráfica bipartita con  $m$  vértices en la primera clase y  $n$  en la segunda.  $z(m, n; s, t)$  es la función de Zarankiewicz, la cual indica, dados  $m, n, s, t$ , el máximo número de aristas que puede tener una gráfica bipartita  $G_2(m, n)$  que no contenga una gráfica bipartita completa con  $s$  vértices en la primera clase y  $t$  en la segunda. Éste es un problema abierto dentro de la teoría de gráficas, aunque existen ciertas cotas.

Analicemos qué sucede con otras familias de gráficas. Para empezar, determinemos el máximo número de aristas que puede tener una gráfica de orden  $n$  que no contenga trayectoria alguna de tamaño  $k$ , es decir,  $ex(n, P_{k+1})$ .

Observemos que toda gráfica conexa y no Hamiltoniana contiene una trayectoria de longitud al menos la circunferencia de la gráfica ya que si  $C = (x_1, x_2, \dots, x_\ell, x_1)$  es un ciclo del mayor tamaño posible, como  $l < |V(G)|$  y  $G$  es conexa, existe  $y \notin C$  adyacente a algún vértice de  $C$ , digamos  $x_1$ . Entonces,  $(y, x_1, x_2, \dots, x_\ell)$  es una trayectoria de longitud  $\ell$  en  $G$ . Consideremos el siguiente resultado que utilizaremos para determinar  $ex(n, P_{k+1})$ .

**Teorema 9.1.3.** Sea  $G$  una gráfica conexa de orden  $n \geq 3$  tal que para cualesquiera dos vértices no adyacentes  $x, y$  se tiene que:

$$d(x) + d(y) \geq k.$$

Si  $k = n$  entonces  $G$  es Hamiltoniana y si  $k < n$  entonces  $G$  contiene una trayectoria de longitud  $k$ ,  $P_{k+1}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $G$  no es Hamiltoniana y sea  $P = (x_1, x_2, \dots, x_\ell)$  una trayectoria de longitud máxima en  $G$ . De acuerdo con la observación anterior,  $x_1$  y  $x_\ell$  no son adyacentes. En virtud de esto y la maximidad de  $P$ , se tiene que los vecinos de  $x_1$  y de  $x_\ell$  son vértices de  $P$ . Más aún, la trayectoria no puede contener vértices  $x_i, x_{i+1}$  tales que  $x_i$  sea adyacente a  $x_\ell$  y  $x_{i+1}$  sea adyacente a  $x_1$ , de lo contrario  $x_1 C x_i x_\ell x_{i-1} \dots x_{i+1} x_1$  es un ciclo de longitud  $l$ .

En consecuencia, si  $X = \{x_2, x_3, \dots, x_\ell\}$ ,

$$d(x_1) \leq |X| - d(x_\ell)$$

De manera que,

$$k \leq d(x_1) + d(x_\ell) \leq |X| = \ell - 1 \leq n - 1.$$

Por lo tanto,  $G$  contiene una trayectoria de longitud  $k$ .

De acuerdo con la última desigualdad obtenida, si  $k = n$ , no es posible que  $G$  no sea Hamiltoniana, por lo tanto en dicho caso  $G$  es Hamiltoniana. Y si  $k < n$  y  $G$  es Hamiltoniana, entonces  $G$  contiene una trayectoria de longitud  $n - 1 \geq k$  y si no es Hamiltoniana, la relación anterior implica que  $G$  tiene una trayectoria de longitud  $\ell - 1 \geq k$ .  $\square$

Ahora sí podemos enunciar el resultado sobre gráficas libres de trayectorias de tamaño  $k$ .

**Teorema 9.1.4.** Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$  sin trayectorias de longitud  $k$  (con  $k \geq 1$ ). Entonces,

$$m \leq \frac{(k-1)n}{2}.$$

Una gráfica de orden  $n \geq k$  es extremal si y sólo si sus componentes conexas son gráficas completas de orden  $k$ .

*Demostración.* Fijemos  $k$  y apliquemos inducción sobre  $n$ .

La afirmación es clara para  $n \leq k$ . Supongamos entonces que  $n > k$  y que la afirmación es cierta para valores menores de  $n$ . Si  $G$  no es conexa entonces la hipótesis de inducción implica el resultado.

Si  $G$  es conexa, no puede contener a  $K_k$ , de lo contrario si  $K_k \cong F \subseteq G$ , al  $k < n$ , existe al menos otro vértice de  $G$  que no está en  $F$  y que es adyacente a un vértice de esta subgráfica, lo cual junto con la Hamiltonicidad de  $K_k$  implica que  $G$  contiene una trayectoria de longitud  $k$ . Por lo tanto, existen vértices no adyacentes y, de acuerdo con el teorema anterior, existe  $x \in V$  con grado a lo más  $\frac{k-1}{2}$ . Entonces, como de acuerdo con la hipótesis de inducción y con el hecho de que  $G$  no contiene a  $K_k$ ,  $G - x$  no es extremal,  $|A(G - x)| < \frac{(k-1)(n-1)}{2}$ , por lo tanto,

$$m = d(x) + |A(G - x)| < \frac{k-1}{2} + \frac{(k-1)(n-1)}{2} = \frac{(k-1)n}{2}.$$

En consecuencia,  $ex(n, P_{k+1}) = \frac{(k-1)n}{2}$ .  $\square$

### 9.1.1. Ciclos ajenos

En esta sección veremos dos problemas extremales que no son del tipo de prohibición de subgráficas. Nos preguntamos ahora cuál es el mínimo número de aristas que tiene que tener una gráfica de orden  $n$  para garantizar la existencia de dos ciclos ajenos.

**Teorema 9.1.5.** Toda gráfica de orden  $n \geq 6$  y tamaño mayor o igual que  $3n - 5$  contiene al menos dos ciclos ajenos.

*Demostración.* Claramente basta con ver que la afirmación es válida para toda gráfica de orden  $n \geq 6$  y tamaño  $3n - 5$ . Hagamos la prueba por inducción sobre  $n$ . Hay únicamente dos gráficas de orden 6 y tamaño 13; una se obtiene al remover dos aristas no adyacentes de  $K_6$  y la otra al remover dos aristas adyacentes de  $K_6$ . En cualquiera de estos casos la gráfica resultante tiene dos triángulos ajenos. Por lo tanto la afirmación es válida para  $n = 6$ .

Sea  $n > 6$  un entero tal que para todo entero  $k$ , con  $6 \leq k < n$ , toda gráfica de orden  $k$  y tamaño  $3k - 5$  contiene dos ciclos ajenos.

Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $3n - 5$ . Como  $\sum_{v \in V} d(v) = 6n - 10$ , existe  $v_0 \in V$  tal que  $d(v_0) \leq 5$ . Dividamos esto en los siguientes tres casos posibles.

$d(v_0) = 5$ .) Sea  $N(v_0) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . Si  $G[N[v_0]]$ , la subgráfica de  $G$  inducida por la vecindad cerrada de  $v_0$ , contiene 13 o más aristas, entonces, en virtud de la base inductiva, contiene 2 ciclos ajenos implicando lo mismo para  $G$ . Si  $G[N[v_0]]$  tiene menos de 13 aristas, entonces, como  $d(v_0) = 5$ , algún vecino de  $v_0$ , digamos  $v_1$ , no es adyacente a dos vecinos de  $v_0$ , digamos  $v_2$  y  $v_3$ . Consideremos la gráfica,  $G'$ , que se obtiene de  $G$  al quitarle el vértice  $v_0$  y agregar las aristas  $v_1v_2$  y  $v_1v_3$ , es decir,

$$G' = (G - v_0) + v_1v_2 + v_1v_3.$$

$G'$  es de orden  $n - 1$  y tamaño  $m' = m - 5 + 2 = 3(n - 1) - 5$ . Por lo tanto, de acuerdo con la hipótesis de inducción  $G'$  contiene dos ciclos ajenos,  $C_1$  y  $C_2$ . Al menos uno de estos, digamos  $C_1$ , no contiene a  $v_1$  y por lo tanto tampoco las aristas  $v_1v_2$  ni  $v_1v_3$ . En consecuencia  $C_1$  es un ciclo en  $G$ . Si  $C_2$  no contiene ninguna de las aristas  $v_1v_2, v_1v_3$ , entonces también  $C_2$  es un ciclo de  $G$  y listo. Si  $C_2$  contiene a  $v_1v_2$  pero no a  $v_1v_3$ , entonces si intercambiamos la arista  $v_1v_2$  en  $C_2$  por la trayectoria  $v_1v_0v_2$ , éste resulta ser un ciclo en  $G$  y ajeno a  $C_1$ . Análogamente si  $v_1v_3 \in C_2$  y  $v_1v_2 \notin C_2$ .

Si  $C_2$  contiene tanto a  $v_1v_2$  como a  $v_1v_3$ , entonces al eliminar de  $C_2$  ambas aristas y sustituirlas por la trayectoria  $v_2v_0v_3$ , se obtiene un ciclo de  $G$  ajeno a  $C_1$ .

$d(v_0) = 4$ .) Sea  $N(v_0) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Si  $G[N[v_0]]$  no es completa, entonces hay dos vértices en  $N(v_0)$ , digamos  $v_1$  y  $v_2$ , que no son adyacentes. Si a  $G$  le quitamos el vértice  $v_0$  y agregamos la arista  $v_1v_2$ , se obtiene una gráfica de orden  $n - 1$  con  $3n - 5 - 3$  aristas, es decir,  $3(n - 1) - 5$  aristas. Así, en virtud de la hipótesis de inducción esta gráfica contiene dos ciclos ajenos. Bajo un razonamiento análogo al anterior se tiene que en este caso  $G$  contiene también dos ciclos ajenos.

Si  $G[N[v_0]]$  es completa tenemos dos casos, que algún vértice de  $V \setminus N[v_0]$  es adyacente a dos o más vértices de  $N(v_0)$ , lo cual implica que  $G$  contiene dos ciclos ajenos; o que ningún vértice de  $V \setminus N[v_0]$  sea adyacente a más de un vértice de  $N(v_0)$ . En este último caso sea  $G'' = G - \{v_0, v_1, v_2\}$ . Entonces  $G''$  tiene orden  $n - 3$ , y al menos  $3n - 5 - (n - 5) - 9 = 2n - 9$  aristas. Así, como  $n \geq 6$ ,  $2n - 9 \geq n - 3$  y en consecuencia  $G''$  contiene un ciclo,  $C_1$ . Por lo tanto,  $C_1$  y  $C_2 = (v_0, v_1, v_2, v_0)$  son dos ciclos ajenos en  $G$ .

$d(v_0) \leq 3$ .) La gráfica  $G' = G - v_0$  es una gráfica de orden  $n - 1$  con  $m'$  aristas donde:  $m' = m - d(v_0) \geq 3n - 5 - 3 = 3(n - 1) - 5$ . Así, de acuerdo con la hipótesis de inducción,  $G'$  contiene dos ciclos ajenos, y por tanto  $G$  también.  $\diamond$

□

Luego de este resultado la pregunta natural es si la cota es justa o se puede mejorar. Considérese la gráfica 4-partita completa de orden  $n$ ,  $K_{1,1,1,n-3}$ . Ésta tiene tamaño  $3n - 6$  pero no contiene dos ciclos ajenos ya que todo ciclo de  $K_{1,1,1,n-3}$  contiene al menos dos vértices con grado  $n - 1$ .

Otro ejemplo de un teorema dentro de la teoría extremal da el mínimo número de aristas que una gráfica de orden  $n$  debe tener para garantizar que ésta contenga una subgráfica con grado mínimo específico.

**Teorema 9.1.6.** Sean  $k$  y  $n$  enteros con  $1 \leq k < n$ . Toda gráfica con orden  $n$  y tamaño al menos  $(k - 1)n - \binom{k}{2} + 1$  contiene una subgráfica con grado mínimo  $k$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $n \geq k + 1$ . Primero asumamos que  $n = k + 1$ . Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño al menos  $(k - 1)n - \binom{k}{2} + 1 = (n - 2)n - \binom{n-1}{2} + 1 = \binom{n}{2}$ . Entonces  $G = K_n = K_{k+1}$  y por lo tanto  $G$  misma es una gráfica con grado mínimo  $k$ .

Supongamos que toda gráfica de orden  $n - 1 \geq k + 1$  y tamaño al menos  $(k - 1)(n - 1) - \binom{k}{2} + 1$  contiene una subgráfica con grado mínimo  $k$ .

Considera una gráfica  $G$  de orden  $n$  y tamaño  $m$ , con  $m \geq (k - 1)n - \binom{k}{2} + 1$ . Veamos que  $G$  contiene una subgráfica con grado mínimo  $k$ . Si  $G$

misma no es dicha gráfica, entonces hay dos posibilidades. O todo vértice de  $G$  tiene grado mayor estricto que  $k$  o existe un vértice de grado menor o igual que  $k - 1$ . En el primer caso, sea  $v \in V$  de grado mínimo  $k + r$  (con  $r \in \mathbb{Z}^+$ ), entonces la gráfica que resulta de quitarle a  $G$   $r$  aristas que inciden en  $v$  resulta ser una subgráfica de  $G$  de grado mínimo  $k$ . En el segundo caso, sea  $v \in V$  tal que  $d(v) \leq k - 1$ . El orden de  $G - v$  es  $n - 1$  y su tamaño  $m'$  está acotado del siguiente modo:

$$m' = m - d(v) \geq (k - 1)n - \binom{k}{2} + 1 - (k - 1) = (k - 1)(n - 1) - \binom{k}{2} + 1.$$

Y, de acuerdo con la hipótesis de inducción,  $G - v$ , y por lo tanto  $G$ , contiene una subgráfica de grado mínimo  $k$ .  $\square$

Nuevamente nos preguntamos sobre la precisión en la cota. Y resulta que ésta tampoco puede ser mejorada de manera general. Si  $k = 1$ , la gráfica  $\overline{K}_n$  no contiene subgráfica alguna de grado mínimo 1. Y, de manera general, si  $2 \leq k < n$ , la gráfica  $\overline{K}_{n-k+1} \vee K_{k-1}$  tiene orden  $n$ , tamaño  $(k - 1)n - \binom{k}{2}$  pero no contiene subgráfica con grado mínimo  $k$ . Consideremos el siguiente teorema que utilizaremos para obtener un c

De acuerdo con el Teorema 9.1.7 si  $G$  es una gráfica tal que  $\delta(G) \geq k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $G$  contiene todo árbol de tamaño  $k$  como subgráfica. Combinando este hecho con el teorema anterior se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 9.1.2.** Sean  $k$  y  $n$  enteros con  $1 \leq k < n$ . Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  y tamaño al menos  $(k - 1)n - \binom{k}{2} + 1$  entonces,  $G$  contiene todo árbol de tamaño  $k$  como subgráfica.

Ponemos la prueba de la afirmación de que si  $G$  es una gráfica tal que  $\delta(G) \geq k - 1$  para algún  $k \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $G$  contiene todo árbol de tamaño  $k$  como subgráfica.

**Teorema 9.1.7.** Sea  $T$  un árbol de orden  $k$ . Si  $G$  es una gráfica tal que  $\delta(G) \geq k - 1$ , entonces  $G$  contiene una subgráfica que es isomorfa a  $T$ .

*Demostración.* Por inducción sobre  $k$ . El resultado es claro para  $k = 1$  ya que  $K_1$  es una subgráfica de toda gráfica y para  $k = 2$ , también es claro que  $K_2$  es una subgráfica de toda gráfica de grado mínimo al menos 1.

Supongamos que para todo árbol  $T'$  de orden  $k - 1$  con  $k \geq 3$  y para toda gráfica  $G'$  tal que  $\delta(G') \geq k - 2$ ,  $G'$  contiene una subgráfica que es isomorfa a  $T'$ . Ahora, sean  $T$  un árbol de orden  $k$  y  $G$  una gráfica con  $\delta(G) \geq k - 1$ .

Sea  $v$  una hoja de  $T$  y  $u$  el vértice de  $T$  adyacente a  $v$ . Así,  $T - v$  es un árbol de orden  $k - 1$ . Como  $\delta(G) \geq k - 1 > k - 2$ , en virtud de la hipótesis

de inducción,  $G$  contiene una subgráfica  $T'$  isomorfa a  $T - v$ . Sea  $u'$  el vértice de  $T'$  correspondiente a  $u$  en  $T - v$ . Como  $d_G(u') \geq k - 1$  y el orden de  $T'$  es  $k - 1$ , el vértice  $u'$  es adyacente a un vértice  $v'$  que no pertenece a  $T'$ . El árbol obtenido al agregar  $v'$  a  $T$  y unirlo con  $u'$  es isomorfo a  $T$ .  $\square$

### 9.1.2. Jaulas

Otro problema extremal que ha tenido mucho interés dentro de la teoría de gráficas es el de determinar, para enteros fijos  $r \geq 2$  y  $g \geq 3$ , el menor orden posible de una gráfica  $r$ -regular cuyo cuello <sup>2</sup> tenga tamaño  $g$ .

**Definición 9.1.2.** Para enteros  $r \geq 2$  y  $g \geq 3$ , una  $(r, g)$ -**gráfica** es una gráfica  $r$ -regular con cuello  $g$ .

Para enteros  $r, g \geq 3$  definamos el entero  $M(r, g)$ , conocido como la **cota de Moore**, en honor a Edward F. Moore, como:

$$M(r, g) = \begin{cases} 1 + r + r(r-1) + r(r-1)^2 + \cdots + r(r-1)^{\frac{g-3}{2}} & \text{si } g \text{ es impar} \\ 2 \left[ 1 + (r-1) + (r-1)^2 + \cdots + (r-1)^{\frac{g-2}{2}} \right] & \text{si } g \text{ es par} \end{cases}$$

A este número se le llama cota de Moore ya que es una cota inferior para el orden de una  $(r, g)$ -gráfica como veremos a continuación.

**Teorema 9.1.8.** Si  $G$  es una  $(r, g)$ -gráfica de orden  $n$ , entonces  $n \geq M(r, g)$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una  $(r, g)$ -gráfica de orden  $n$ . Tenemos dos casos posibles.

Supongamos que  $g$  es impar, digamos  $g = 2k + 1$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Sea  $v \in V(G)$ . Para  $1 \leq i \leq k$ , el número de vértices a distancia  $i$  de  $v$  es  $r(r-1)^{i-1}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} n &\geq 1 + r + r(r-1) + r(r-1)^2 + \cdots + r(r-1)^{k-1} \\ &= 1 + r + r(r-1) + r(r-1)^2 + \cdots + r(r-1)^{\frac{g-3}{2}} \end{aligned}$$

Si  $g$  es par, digamos  $g = 2k$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Sea  $uv \in A(G)$ . Para  $1 \leq i \leq k - 1$ , el número de vértices a distancia  $i$  de  $v$  o de  $u$  es  $2(r-1)^i$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n &\geq 2 + 2(r-1) + 2(r-1)^2 + \cdots + 2(r-1)^{k-1} \\ &= 2 + 2(r-1) + 2(r-1)^2 + \cdots + 2(r-1)^{\frac{g-2}{2}} \end{aligned}$$

En conclusión,  $n \geq M(r, g)$ .  $\square$

---

<sup>2</sup>Sea  $G$  una gráfica. El **cuello** de  $G$  es la longitud del menor ciclo, que se denota como  $g(G)$ .

Por ejemplo, si  $r = 3$  y  $g = 5$ ,  $M(3, 5) = 10$ . De hecho, la gráfica de Petersen tiene dichas características, de manera que, en virtud del teorema anterior, ésta es una  $(3, 5)$ -gráfica de orden mínimo. Más aún, ésta resulta ser la única gráfica con dichas características.

**Teorema 9.1.9.** La gráfica de Petersen es la única  $(3, 5)$ -gráfica de orden mínimo.

*Demostración.* Sea  $G$  una  $(3, 5)$ -gráfica de orden 10. Veamos que  $G$  es isomorfa a la gráfica de Petersen. Sea  $v_1 \in V(G)$  y sean  $v_2, v_3, v_4$  los vecinos de  $v_1$  en  $G$ . Como  $g(G) = 5$ , cada vértice  $v_i$ , con  $2 \leq i \leq 4$  es adyacente a dos nuevos vértices de  $G$ . Sean  $v_5$  y  $v_6$  los otros dos vecinos de  $v_2$ ,  $v_7$  y  $v_8$  los otros dos vecinos de  $v_3$  y  $v_9$  y  $v_{10}$  los otros dos vecinos de  $v_4$ . Entonces  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ . El hecho de que  $G$  tiene cuello 5 y de que es 3-regular implica que  $v_5$  es adyacente a alguno de los vértices  $v_7$  y  $v_8$  y a uno de los vértices de  $v_9$  y  $v_{10}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $v_5$  es adyacente a  $v_8$  y  $v_9$ . Entonces  $v_6$  es adyacente tanto a  $v_7$  como a  $v_{10}$ . Lo cual a su vez implica que  $v_7$  es adyacente a  $v_9$  y que  $v_8$  es adyacente a  $v_{10}$ . La figura de abajo muestra el isomorfismo entre  $G$  y la gráfica de Petersen.  $\square$

De manera general, para enteros  $r \geq 2$  y  $g \geq 3$  denotemos con  $n(r, g)$  al mínimo orden posible para las  $(r, g)$ -gráficas.

**Definición 9.1.3.** Una  $(r, g)$ -*jaula* es una  $(r, g)$ -gráfica de orden  $n(r, g)$ .

En particular, a las  $(3, g)$ -jaulas se les llama simplemente  $g$ -jaulas. Así, la gráfica de Petersen es la única 5-jaula. Surge entonces la pregunta de para qué enteros  $r \geq 2$  y  $g \geq 3$  existe una  $(r, g)$ -jaula. Notemos las siguientes propiedades:

- $n(r, g) \geq \max\{r + 1, g\}$
- $n(2, g) = g$  ya que  $C_g$  es una gráfica 2-regular de cuello  $g$ .
- $n(r, 3) = r + 1$  ya que  $K_{r+1}$  es una gráfica  $r$ -regular con cuello 3 y  $M(r, 3) = r + 1$ .

Otro caso especial son las  $(r, 4)$ -jaulas.

**Teorema 9.1.10.** Para  $r \geq 2$ ,  $n(r, 4) = 2r$ . Más aún, para cada entero  $r \geq 2$  existe únicamente una  $(r, 4)$ -jaula, ésta es  $K_{r,r}$ .

*Demostración.* Como la cota de Moore es  $M(r, 4) = 2r$ , se sigue del Teorema 9.1.8 que  $n(r, 4) \geq 2r$ . Claramente la gráfica  $K_{r,r}$  es  $r$  regular, tiene cuello 4 y orden  $2r$ , lo cual implica que  $n(r, 4) = 2r$ . Veamos que  $K_{r,r}$  es la única

$(r, 4)$ -jaula. Sean  $G$  una  $(r, 4)$ -jaula y  $u_1 \in V(G)$ . Denotemos con  $v_1, v_2, \dots, v_r$  los vecinos de  $u_1$  en  $G$ . Como  $g(G) = 4$ ,  $v_1$  no es adyacente a algún  $v_i$  con  $2 \leq i \leq r$ . Por lo tanto,  $G$  contiene  $r - 1$  vértices adicionales  $u_2, u_3, \dots, u_r$ . Como todo vértice tiene grado  $r$  y  $G$  no contiene triángulos, cada vértice  $u_i$ , con  $1 \leq i \leq r$  es adyacente a cada vértice  $v_j$ , con  $1 \leq j \leq r$  y por lo tanto  $G \cong K_{r,r}$ .  $\square$

El siguiente resultado de Paul Erdős y Horst Sachs no sólo establece la existencia de todas las jaulas sino que también provee una cota superior de sus órdenes.

**Teorema 9.1.11.** Para toda pareja de enteros  $r \geq 2$  y  $g \geq 3$ , el número  $n(r, g)$  existe y

$$n(r, g) \leq 3(r - 1) + 2[(r - 1)^2 + (r - 1)^3 + \dots + (r - 1)^{g-2}] + (r - 1)^{g-1}.$$

*Demostración.* De acuerdo con la observación anterior sabemos que  $n(2, g) = g$  para todo  $g \geq 3$  y  $n(r, 3) = r + 1$  para todo  $r \geq 2$ , podemos asumir que  $r \geq 3$  y  $g \geq 4$ . Sean

$$n = 3(r - 1) + 2[(r - 1)^2 + (r - 1)^3 + \dots + (r - 1)^{g-2}] + (r - 1)^{g-1},$$

y  $S$  el conjunto de todas las gráficas de orden  $n$ , cuello  $g$  y grado máximo menor o igual que  $r$ . Es decir,  $S := \{H \mid |V(H)| = n, g(H) = g \text{ y } \Delta(H) \leq r\}$ . De manera que  $n \geq g$ . Como  $C_g + (n - g)K_1$  pertenece a  $S$ , este conjunto es distinto del vacío. Para cada  $H$  en  $S$  sea  $V_r(H) := \{v \in V(H) \mid d_H(v) < r\}$ . Si  $V_r(H) = \emptyset$  para alguna gráfica  $H$  de  $S$ , ésta tiene las características buscadas y listo, Supongamos entonces que para toda gráfica  $H \in S$ ,  $V_r(H) \neq \emptyset$ .

Para cada gráfica  $H$  en  $S$  sea  $d(H)$  la distancia máxima entre dos vértices de  $V_r(H)$ , si cualesquiera dos vértices de  $V_r(H)$  están conectados en  $H$ , y  $d(H) = \infty$  en otro caso. Obsérvese que si  $|V_r(H)| = 1$ , entonces  $d(H) = 0$ .

Dentro de todas las gráficas que pertenecen a  $S$ , sea  $S_1$  el conjunto de aquellas gráficas de tamaño máximo. Luego, dentro de todas las gráficas de  $S_1$ , sea  $S_2$  el conjunto de aquellas gráficas  $H$  para las cuales  $|V_r(H)|$  es máximo. Finalmente, dentro de todas esas gráficas que pertenecen a  $S_2$ , sea  $G$  una tal que  $d(G)$  es máximo.

Sean  $u, v \in V_r(G)$  dos vértices tales que  $d_G(u, v) = d(G)$ . Veamos que  $d(G) \leq g - 2$ . Ya que, de lo contrario, si  $d(G) \geq g - 1 \geq 2$ , la gráfica  $G' = G - uv$  tiene orden  $n$ , cuello  $g$  y  $\Delta(G') \leq r$ , lo cual implica que  $G' \in S$ . Sin embargo, como el tamaño de  $G'$  es mayor que el de  $G$  y  $G \in S$ , lo cual lleva a una contradicción. Por lo tanto  $d(G) \leq g - 2$  y en consecuencia  $d_G(u, v) \leq g - 2$ .

Denotemos con  $W$  al conjunto de todos los vértices de  $G$  tales que o  $d_G(u, w) \leq g - 2$  o  $d_G(v, w) \leq g - 1$ . De manera que  $u, v \in W$ . El número de vértices distintos a  $u$  y cuya distancia a  $u$  es a lo más  $g - 2$  no excede

$$(r - 1) + (r - 1)^2 + \cdots + (r - 1)^{g-2}.$$

Además, el número de vértices distintos a  $v$  y cuya distancia a  $v$  es a lo más  $g - 1$  no puede exceder

$$(r - 1) + (r - 1)^2 + \cdots + (r - 1)^{g-1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |W| &\leq 2[(r - 1) + (r - 1)^2 + \cdots + (r - 1)^{g-2}] + (r - 1)^{g-1} \\ &= 3(r - 1) + 2[(r - 1) + (r - 1)^2 + \cdots + (r - 1)^{g-2}] + (r - 1)^{g-1} - (r - 1) \\ &= n - r + 1 < n \end{aligned}$$

Como  $|W| < n$ , existe un vértice  $w_1 \in V(G) \setminus W$ . Entonces,  $d_G(u, w_1) \geq g - 1$  y  $d_G(v, w_1) \geq g$ . Al  $d_G(u, w_1) \geq g - 1 > g - 2 \geq d(G)$  y  $u$  pertenecer a  $V_r(G)$ , se sigue que  $w_1 \notin V_r(G)$ , y por lo mismo  $d_G(w_1) = r \geq 3$ . Por lo tanto, existe una arista  $e = w_1 w_2$  tal que  $d(G - e) = g$ . Por otro lado, como  $d_G(v, w_1) \geq g$ ,  $d(v, w_2) \geq g - 1$ . Además, al  $d(G)$  ser menor o igual que  $g - 2$  y  $v$  pertenecer a  $V_r(G)$ ,  $w_2 \notin V_r(G)$  y  $d(w_2) = r$ .

Sea  $G_1 = G - w_1 w_2 + u w_1$ . Obsérvese que  $G_1 \in S$ , más aún,  $G_1$  pertenece a  $S_1$  ya que tiene el mismo tamaño que  $G$ . El conjunto  $V_r(G_1)$  contiene a todo vértice de  $V_r(G)$  excepto, quizás,  $u$  y en cambio contiene a  $w_2$ , el cual no pertenece a  $V_r(G)$ . En virtud de la elección de  $G$ , se sigue que  $|V_r(G_1)| \leq |V_r(G)|$ . Esto implica que:

- (i)  $u \notin V_r(G_1)$
- (ii)  $d_G(u) = r - 1$  y
- (iii)  $|V_r(G_1)| = |V_r(G)|$ .

Por lo tanto  $G_1$  pertenece a  $S_2$ .

Notemos que  $|V_r(G)| \neq 1$ , de lo contrario  $G$  contiene  $n - 1$  vértices de grado  $r$  y un vértice de grado  $r - 1$ ; esto implica que tanto  $r$  como  $n$  son impares. Lo cual es imposible en virtud de la definición de  $n$ , ya que  $n$  es par cuando  $r$  es impar.

Afirmamos que  $G_1$  contiene una  $(v, w_2)$ -trayectoria. De lo contrario,  $d(G_1) = \infty$ . Sin embargo:

$$\infty = d(G_1) \leq d(G) \leq g - 2,$$

lo cual es imposible.

Sea  $P$  una  $(v, w_2)$ -geodésica en  $G_1$ . Si  $P$  es a su vez una  $(v, w_2)$ -trayectoria en  $G$ , entonces la longitud de  $P$  es al menos  $d_G(v, w_2)$ . No obstante,

$$d_G(v, w_2) \geq g - 1 > d(G) \geq d(G_1),$$

lo cual contradice el hecho de que tanto  $v$  como  $w_2$  son elementos de  $V_r(G_1)$ .

Por lo tanto,  $P$  no es una  $(v, w_2)$ -trayectoria en  $G$ , de manera que la arista  $uw_1$  pertenece a  $P$ . Entonces, en  $G$  la trayectoria  $P$  contiene una  $(u, v)$ -subtrayectoria de longitud  $d_G(u, v)$ . Como la longitud de  $P$  excede  $d_G(u, v) = d(G)$ , se obtiene una contradicción.

En conclusión, debe de existir una gráfica  $H$  en  $S$  con  $V_r(H) = \emptyset$  y por lo tanto  $H$  misma es una gráfica  $r$ -regular de orden  $n$  y cuello  $g$ .  $\square$

Otro ejemplo es la gráfica de Heawood, la cual es la única 6-jaula. Ésta consta de 14 vértices. De hecho, la gráfica de Heawood es el dual toroidal del encaje de  $K_7$  en el toro. Esto es, la gráfica de Heawood se construye al insertar un vértice en cada región de las 14 que hay, y uniendo dos vértices por una arista si las regiones correspondientes tienen una arista frontera en común.

También hay únicamente una 7-jaula, a la cual se le conoce como gráfica de McGee. Ésta fue inicialmente descubierta por Horst Sachs, pero el primero que la publicó fue McGee en 1960. Existe únicamente una 8-jaula, a la cual se le llama la gráfica de Tutte-Coxeter. En el caso de las 9-jaulas hay 18 diferentes, cada una de orden 58. Hay tres 10-jaulas distintas, cada una de orden 70. La primera 11-jaula, de orden 112, fue construida por Alexandru Balaban en 1973 y no fue sino hasta veinticinco años después que Brendan McKay, Wendy Myrvold y Jacqueline Nadon, probaron que la gráfica de Balaban es la única 11-jaula. Hay únicamente una 12-jaula de orden 126, conocida como la gráfica de Benson en honor a Clark T. Benson, quien la descubrió por primera vez en 1966.

La siguiente tabla muestra los órdenes  $n(r, g)$  de las  $(r, g)$ -jaulas que se conocen hasta ahora, para  $3 \leq r \leq 7$  y  $3 \leq g \leq 12$ .

$r/g$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	6	10	14	24	30	58	70	112	126
4	5	8	19	26	67	80	275	384	-	728
5	6	10	30	42	152	170	-	-	-	2730
6	7	12	40	62	294	312	-	-	-	7812
7	8	14	50	90	-	-	-	-	-	-

Hay una clase de jaulas conocidas como gráficas de Moore que ha recibido especial interés. Primero obsérvese que para cada vértice  $v$  en una gráfica

$r$ -regular  $G$  de diámetro  $d$ , el número de vértices a distancia  $i$  de  $v$  (con  $1 \leq i \leq d$ ) es a lo más  $r(r-1)^{i-1}$ . Por lo tanto, el orden de  $G$  es a lo más:

$$1 + r + r(r-1) + r(r-1)^2 + \cdots + r(r-1)^{d-1}.$$

**Definición 9.1.4.** Una **gráfica de Moore** es una gráfica  $r$ -regular de diámetro  $d$  con orden  $1 + r + r(r-1) + r(r-1)^2 + \cdots + r(r-1)^{d-1}$ .

Sea  $G$  una gráfica de Moore  $r$ -regular con diámetro  $d$ . Para cada vértice  $v$  en  $G$ , sea  $A_i(v)$  el conjunto de vértices cuya distancia a  $v$  es  $i$ , con  $0 \leq i \leq d$ . Para todo  $i$ , con  $1 \leq i \leq d-1$ ,  $A_i(v)$  es un conjunto de vértices independiente con  $r(r-1)^{i-1}$  vértices y  $V(G) = \bigcup_{i=0}^d A_i(v)$ . La gráfica  $G$  necesariamente tiene cuello  $g = 2d + 1$  ya que no hay suficientes vértices para tener un cuello más grande y un ciclo de longitud menor que  $2d + 1$  implicaría que hubiese muy pocos vértices entre los primeros  $d$  niveles de distancia al vértice dado  $v$ . Por lo tanto,

$$M(r, g) = M(r, 2d + 1) = 1 + r + r(r-1) + r(r-1)^2 + \cdots + r(r-1)^{d-1}.$$

Es decir,  $n(r, g) = M(r, g)$ . En consecuencia, una gráfica de Moore es una jaula. Esto es, si  $G$  es una gráfica de Moore  $r$ -regular con diámetro  $d$ , entonces  $G$  es una  $(r, 2d + 1)$ -jaula.

En particular todo ciclo impar  $C_{2k+1}$ , con  $k \geq 1$ , es una gráfica de Moore. De hecho,  $C_{2k+1}$  es una gráfica de Moore 2-regular, con diámetro  $k$  y cuello  $2k + 1$ . Además,  $K_{r+1}$ , con  $r \geq 2$ , es una gráfica de Moore  $r$ -regular de diámetro 1 y cuello 3. Hay únicamente otras 2 gráficas de Moore conocidas, la de Petersen, la cual es una gráfica de Moore 3-regular de diámetro 2 y cuello 5, y una gráfica 7-regular de diámetro 2, cuello 5 y orden 50, conocida como la gráfica de Hoffman-Singleton.

El siguiente teorema, de Hoffman y Singleton, establece todo lo que se conoce sobre las gráficas de Moore  $r$ -regulares de cuello 5.

**Teorema 9.1.12.** Si  $G$  es una gráfica de Moore  $r$ -regular ( $r \geq 3$ ) de cuello 5, entonces  $r = 3$ ,  $r = 7$  o, posiblemente  $r = 57$ .

Hasta ahora tenemos que  $C_5$  es la única gráfica de Moore 2-regular de cuello 5, Petersen es la gráfica de Moore 3-regular de cuello 5 y la gráfica de Moore 7-regular de cuello 5 es la gráfica de Hoffman-Singleton. Hasta ahora no se sabe si existe una gráfica de Moore 57-regular de cuello 5, pero si ésta existe, debe de ser de orden 3250.

La definición de gráfica de Moore ha sido extendida para permitir a una gráfica de Moore tener cuello par. Para cualesquiera dos vértices adyacentes

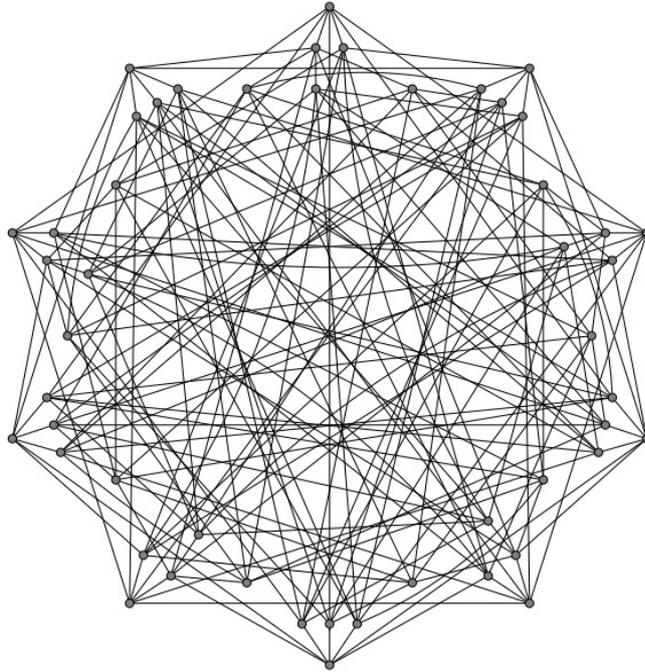


Figura 9.1: Gráfica de Hoffman-Singleton.

$u$  y  $v$  en una gráfica  $r$ -regular  $G$  de diámetro  $d$ , el número de vértices  $w$  en  $G$  tales que  $\min\{d(u, w), d(v, w)\} = i$ , con  $0 \leq i \leq d - 1$  es a lo más  $2(r - 1)^i$ . Por lo tanto, el orden de  $G$  es a lo más

$$2[1 + (r - 1) + (r - 1)^2 + \dots + (r - 1)^{d-1}].$$

Así, la siguiente definición de gráfica de Moore es tomando en cuenta esta extensión.

**Definición 9.1.5.** Una *gráfica de Moore* es una gráfica  $r$ -regular de diámetro  $d$  con orden:

- $1 + r + r(r - 1) + r(r - 1)^2 + \dots + r(r - 1)^{d-1}$  u orden
- $2[1 + (r - 1) + (r - 1)^2 + \dots + (r - 1)^{d-1}]$ .

En el segundo caso, dicha gráfica de Moore tiene necesariamente cuello  $g = 2d$ . Entonces,

$$M(r, g) = M(r, 2d) = 2[1 + (r - 1) + (r - 1)^2 + \dots + (r - 1)^{d-1}].$$

En consecuencia,  $n(r, g) = M(r, g)$  y por lo tanto, también en este caso, la gráfica de Moore resulta ser una jaula. Es decir, si  $G$  es una gráfica de Moore

$r$ -regular de diámetro  $d$ , entonces  $G$  es una  $(r, g)$ -jaula, con  $g(G) = 2d + 1$  o  $g(G) = 2d$ .

Tomando la definición de gráfica de Moore extendida, la gráfica  $K_{r,r}$  es una gráfica de Moore  $r$ -regular de cuello 4, la gráfica de Heawood es una gráfica de Moore 3-regular de cuello 6 y la gráfica de Tutte-Coxeter es una gráfica de Moore 3-regular de cuello 8. De manera general, Robert Mark Damerrell y Eiichi Bannai y Tatsuro Ito, verificaron que además de las gráficas de Moore que hemos citado, una gráfica de Moore debe de tener cuello 5, 6, 8 o 12. El siguiente teorema resume toda la información que se tiene sobre gráficas de Moore.

**Teorema 9.1.13.** Existe una gráfica de Moore  $r$ -regular de cuello impar  $g$  si:

- $g = 3$  y  $r \geq 3$ , en cuyo caso  $K_{r+1}$  es la única gráfica de Moore.
- $g = 5$  y  $r = 3$ , en cuyo caso la gráfica de Petersen es la única gráfica de Moore.
- $g = 5$  y  $r = 7$ , en cuyo caso la gráfica de Hoffman-Singleton es la única gráfica de Moore; y
- posiblemente cuando  $g = 5$  y  $r = 57$ .

Existe una gráfica de Moore  $r$ -regular de cuello  $g$  par cuando:

- $g = 4$  y  $r \geq 4$ , en cuyo caso  $K_{r,r}$  es la única gráfica de Moore;
- $g = 6$  y para todo  $r$  para el cual existe un plano proyectivo de orden  $r - 1$ ;
- $g = 8$  y para todo  $r$  para el cual existe cierta geometría proyectiva; y
- $g = 12$  y para todo  $r$  para el cual existe cierta geometría proyectiva.

## 9.2. Coloraciones monocromáticas y arcoris

### 9.2.1. Números de Ramsey

**Teorema 9.2.1 (Teorema de Ramsey).** Para cualesquiera  $k + 1 \geq 3$  y enteros positivos  $t, n_1, n_2, \dots, n_k$ , existe  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que si cada uno de los subconjuntos de orden  $t$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  es coloreado con los  $k$  colores  $1, 2, \dots, k$ , entonces, para algún entero  $1 \leq i \leq k$ , existe un subconjunto  $S$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  con cardinal  $n_i$  y tal que todo subconjunto de orden  $t$  de  $S$  es coloreado con  $i$ .

Para ver la conexión que hay entre el teorema de Ramsey y la teoría de gráficas, supongamos que  $\{1, 2, \dots, n\}$  es el conjunto de vértices de la gráfica completa  $K_n$ . En particular, si  $t = 2$ , cada subconjunto de cardinal 2 de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , esto es, cada arista de  $K_n$ , se le asigna un color dentro de los colores  $1, 2, \dots, k$ , de este modo se produce una  $k$ -arista-coloración de  $K_n$  (no necesariamente una coloración propia). Es este caso en particular del teorema de Ramsey en el que se tiene especial interés dentro de la teoría de gráficas.

**Teorema 9.2.2 (Teorema de Ramsey).** Para cualesquiera  $k \geq 2$  y enteros positivos  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , existe  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que toda  $k$ -arista-coloración de  $K_n$  (no necesariamente propia), contiene una subgráfica completa  $K_{n_i}$  de  $K_n$  para algún  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) tal que toda arista de  $K_{n_i}$  es de color  $i$ .

Empecemos analizando el caso en el que  $k = 2$ , es decir, los casos en los que se trata con 2-arista-coloraciones que se suele mencionar como arista-coloración rojo-azul. Ya que se considera una 2-arista-coloración con los colores rojo y azul. También, de manera general, tenemos la siguiente definición.

**Definición 9.2.1.** Sean  $F$  y  $H$  dos gráficas, el **número de Ramsey**  $r(F, H)$  es el mínimo orden  $n$  de una gráfica completa tal que para toda coloración rojo-azul de  $K_n$  hay una subgráfica isomorfa a  $F$  cuyas aristas son todas rojas ( $F$  roja), o hay una subgráfica isomorfa a  $H$  cuyas aristas son todas azules ( $H$  azul).

Observemos que para cualesquiera gráficas  $F$  y  $H$ , como los colores utilizados en las 2-arista-coloraciones en realidad son irrelevantes,  $r(F, H) = r(H, F)$ . Además, el número de Ramsey  $r(F, H)$  existe para cualesquiera dos gráficas  $F$  y  $H$ . De hecho, si  $F$  tiene orden  $s$  y  $H$  tiene orden  $t$ , entonces

$$r(F, H) \leq r(s, t).$$

Empecemos con el caso más sencillo. Veamos que  $r(K_2, K_s) = s$ , para todo  $s \geq 2$ . Para esto notemos que  $r(K_2, K_s) \geq s$ , ya que si se considera la coloración que asigne el color azul a todas las aristas de  $K_r$ , con  $r < s$ , ésta es una arista-coloración que no contiene  $K_2$  roja alguna, ni  $K_s$  azul. Falta probar que  $r(K_2, K_s) \leq s$ , para lo cual sólo hay que mostrar que toda 2-arista-coloración de  $K_s$  contiene  $K_2$  roja o  $K_s$  azul. Si no contiene  $K_2$  roja, quiere decir que todas las aristas son de color azul y por lo tanto contiene a  $K_s$  azul (ella misma lo es). Con lo cual terminamos la prueba. Aún más sencillo por vacuidad se obtiene que  $r(1, t) = 1$ , para cualquier  $t \geq 1$ .

Quizás el número de Ramsey más famoso es  $R(K_3, K_3)$ . Éste se puede interpretar como ¿cuál es el mínimo número de personas que debe de haber

en una reunión para garantizar que hayan tres personas que se conocen todas entre sí o que haya un grupo de tres personas que no se conocen entre sí?

**Teorema 9.2.3.**  $r(K_3, K_3) = 6$ .

*Demostración.* Sea  $V(K_5) = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ . Si se considera la coloración que asigne a todas las aristas del ciclo  $(v_1, v_2, \dots, v_4, v_5, v_1)$  el color rojo y al resto de las aristas de  $K_5$  el color azul. Es claro que ésta no contiene un triángulo monocromático (ni de color azul ni de color rojo). Por lo tanto  $r(K_3, K_3) \geq 6$ . Veamos que  $r(K_3, K_3) \leq 6$ . Para esto, consideremos una coloración rojo-azul arbitraria de  $K_6$ . Sea  $v_1 \in V(K_6)$ . Como  $d(v_1) = 5$  y sólo se tienen dos colores, en  $v_1$  inciden al menos tres aristas de un mismo color, digamos rojo. Supongamos que  $v_1v_2, v_1v_3$  y  $v_1v_4$ , son tres de éstas. Si  $K_6$  no contiene triángulos rojos, entonces las aristas  $v_2v_3, v_3v_4$  y  $v_4v_2$  son de color azul, lo cual forma un triángulo azul. Por lo tanto  $r(K_3, K_3) \leq 6$ .  $\square$

Sean  $F_1, F_2$  dos gráficas no vacías de orden  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente. Sea  $n = \max\{n_1, n_2\}$ , entonces  $r(F_1, F_2) \geq n$ . Esto ya que si coloreamos todas las aristas de  $K_{n-1}$  de color rojo, ésta no contiene ni  $F_1$  de color rojo ni  $F_2$  de color azul. Por lo tanto

$$r(F_1, F_2) \geq \max\{|V(F_1)|, |V(F_2)|\}.$$

Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$ . Toda arista de  $K_n$  pertenece a  $G$  o a  $\overline{G}$ , pero no a ambas. Si coloreamos las aristas de  $K_n$  que pertenecen a  $G$  de color rojo y las aristas de  $\overline{G}$  de color azul podemos reformular el número de Ramsey para dos gráficas como sigue. Sean  $F_1, F_2$  dos gráficas no vacías, el número de Ramsey  $r(F_1, F_2)$  es el menor entero positivo  $n$  tal que si  $G$  es cualquier gráfica de orden  $n$ , entonces  $G$  contiene como subgráfica una gráfica isomorfa a  $F_1$  o  $\overline{G}$  contiene una subgráfica isomorfa a  $F_2$ . En particular,  $r(K_s, K_t)$  es el menor entero positivo  $n$  tal que si  $G$  es cualquier gráfica de orden  $n$ , entonces  $G$  contiene a una gráfica completa de orden  $s$  o  $G$  contiene un conjunto independiente de orden  $t$ .

Los números  $r(K_s, K_t)$  fueron los primeros números de Ramsey estudiados de manera extensamente y por lo mismo se les suele llamar **números de Ramsey clásicos**. De hecho,  $r(K_s, K_t)$  suele denotarse simplemente como  $r(s, t)$ . A pesar de que los números de Ramsey  $r(K_s, K_t)$  han sido estudiados por décadas, se conocen relativamente pocos de ellos para  $s, t \geq 3$ . De hecho, los únicos números de Ramsey  $r(K_s, K_t)$  conocidos con  $3 \leq s \leq t$  son:

$$\begin{array}{lll}
r(3,3) = 6 & r(3,6) = 18 & r(3,9) = 36 \\
r(3,4) = 9 & r(3,7) = 23 & r(4,4) = 18 \\
r(3,5) = 14 & r(3,8) = 28 & r(4,5) = 25.
\end{array}$$

En particular, no se conoce  $r(5,5)$ , pero se sabe que  $43 \leq r(5,5) \leq 49$ .

**Proposición 9.2.1.**  $r(P_4, K_4) = 10$ .

*Demostración.* Para ver que  $r(P_4, K_4) \geq 10$  consideremos la coloración rojo-azul de  $K_9$  en la cual la subgráfica roja<sup>3</sup> es  $3K_3$ . Como el orden de toda componente de  $3K_3$  es 3, no existe  $P_4$  roja en esta coloración rojo-azul de  $K_9$ . La subgráfica azul en este caso es  $K_{3,3,3}$  la cual no contiene a  $K_4$ . Por lo tanto no hay una  $K_4$  azul en  $K_9$  con esta coloración. En consecuencia,  $r(P_4, K_4) \geq 10$ .

Veamos ahora que  $r(P_4, K_4) \leq 10$ . Consideremos una coloración rojo-azul arbitraria, de  $G = K_{10}$ . Probaremos que hay o una trayectoria  $P_4$  de color rojo, o que hay una  $K_4$  azul. Supongamos primero que en algún vértice  $v$  de  $G$  inciden 4 o más aristas de color rojo, digamos  $vv_1, vv_2, vv_3$  y  $vv_4$ . Si alguna de las aristas que una a dos vértices de  $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  es roja, entonces se forma  $P_4$  roja; de lo contrario,  $G[S] = K_4$  es azul.

Por lo tanto, podemos suponer que en todo vértice de  $G$  inciden seis o más aristas de color azul. Sea  $u \in V(G)$  y supongamos que  $uu_1, uu_2, \dots, uu_6$  son aristas azules de  $G$ . Sean  $A = \{u_1, u_2, \dots, u_6\}$  y  $H = G[A] = K_6$ . Como, de acuerdo con el Teorema 9.2.3  $r(3,3) = 6$ ,  $H$  contiene un triángulo rojo o un triángulo azul. Como  $u$  es adyacente a todo vértice de  $H$  por una arista azul, si  $H$  contiene un triángulo azul, entonces  $G$  contiene una  $K_4$  azul. Supongamos entonces que  $H$  contiene un triángulo rojo, que denotamos con  $F_1$ . Si algún vértice de  $F_1$  es adyacente a algún vértice de  $V(G) \setminus V(F_1)$  con una arista roja, entonces resulta una  $P_4$  roja. Supongamos entonces que  $G$  contiene una  $K_{3,7}$  azul donde  $V(F_1)$  es el conjunto independiente de orden 3. Como todo vértice de  $F_1$  está conectado a seis vértices de  $V(G) \setminus V(F_1)$  con aristas azules, utilizando un razonamiento análogo al anterior concluimos que  $G$  contiene un triángulo rojo, que denotamos con  $F_2$ , el cual es ajeno a  $F_1$ . Podemos suponer entonces, que todo vértice de  $V(G) \setminus V(F_2)$  está conectado a los vértices de  $F_2$  con aristas azules. Por lo tanto, todo vértice de  $V(F_1) \cup V(F_2)$  en la subgráfica azul,  $G_A$ , de  $G$  tiene grado 7 y los cuatro vértices restantes de  $G_A$  tienen grado al menos 6. Por lo tanto, el tamaño de  $G_A$  es al menos  $(6 \cdot 7 + 4 \cdot 6)/2 = 33$ . Así, en virtud del Teorema de Turán,  $G_A$  contiene un  $K_4$  (y por lo tanto  $G$  contiene un  $K_4$  azul) o  $G_A$  tiene tamaño 33 y por lo tanto es la gráfica de Turán  $T_{10,3} = K_{3,3,4}$ , implicando que  $G$  contiene una  $K_4$  roja y por lo tanto también una trayectoria  $P_4$  roja.  $\square$

<sup>3</sup>La subgráfica inducida por las aristas de color rojo.

### Cotas para los números de Ramsey

**Teorema 9.2.4.** Para cualesquiera dos enteros  $s, t \geq 2$ , el número de Ramsey  $r(s, t)$  existe y

$$r(s, t) \leq r(s-1, t) + r(s, t-1).$$

Más aún, si  $r(s-1, t)$  y  $r(s, t-1)$  son ambos pares, entonces

$$r(s, t) \leq r(s-1, t) + r(s, t-1) - 1.$$

*Demostración.* Procedamos por inducción sobre  $s+t \geq 4$ . Sabemos que  $r(s, t)$  existe si alguno de  $s$  y  $t$  es 1 o 2. Por lo tanto  $r(1, 3) = r(3, 1)$  y  $r(2, 2)$  existen.

Supongamos que  $r(s', t')$  existe si  $s', t' \geq 2$  y  $s' + t' = k - 1$  para algún entero  $k \geq 5$ . Sean  $s, t \geq 2$  tales que  $s + t = k$ . En particular, de acuerdo con la hipótesis de inducción,  $r(s-1, t)$  y  $r(s, t-1)$  existen. Sea  $n = r(s-1, t) + r(s, t-1)$  y consideremos una coloración rojo-azul de  $G = K_n$ . Para concluir lo deseado basta probar que  $G$  contiene  $K_s$  roja o  $K_t$  azul.

Sea  $v \in V(G)$ . Entonces,  $d_G(v) = n - 1 = r(s-1, t) + r(s, t-1) - 1$ . Sea  $F$  la subgráfica generadora de  $G$  inducida por las aristas de color rojo y  $H$  la subgráfica generadora de  $G$  inducida por las aristas de color azul. Dependiendo del grado de  $v$  en  $F$  tenemos dos casos posibles.

$d_F(v) \geq r(s-1, t)$  Como el orden de  $G[N_F(v)]$  es al menos  $r(s-1, t)$ , se sigue que  $G[N_F(v)]$  contiene una  $K_{s-1}$  roja o que contiene una  $K_t$  azul. Si  $G[N_F(v)]$  contiene una  $K_t$  azul, entonces también  $G$ . Si  $G[N_F(v)]$  contiene una  $K_{s-1}$  roja, entonces  $F$  contiene una  $K_s$  roja y en consecuencia también  $G$  la contiene.

$d_F(v) \leq r(s-1, t) - 1$  Este caso implica que  $d_H(v) \geq r(s, t-1)$ . Luego, como el orden de  $G[N_H(v)]$  es al menos  $r(s, t-1)$ ,  $G[N_H(v)]$  contiene  $K_s$  roja o contiene  $K_{t-1}$  azul. Si contiene  $K_s$  roja, también  $G$ . Si contiene  $K_{t-1}$  azul, entonces  $H$  contiene  $K_t$  azul, en consecuencia  $G$  misma también.

Por lo tanto  $r(s, t)$  existe y  $r(s, t) \leq r(s-1, t) + r(s, t-1)$ .

Ahora supongamos que tanto  $r(s-1, t)$  como  $r(s, t-1)$  son pares. Sea  $n = r(s-1, t) + r(s, t-1)$ . Consideremos  $G' = K_{n-1}$  con una coloración rojo-azul arbitraria. Sean  $F'$  la subgráfica generadora de  $G'$  inducida por las aristas de color rojo y  $H'$  la subgráfica generadora de  $G'$  inducida por las aristas de color azul. Como  $F'$  tiene orden impar, alguno de sus vértices, digamos  $v$ , tiene grado par. Si  $d_{F'}(v) \geq r(s-1, t)$ , bajo un razonamiento

análogo al anterior se tiene que  $G'$  contiene o una  $K_s$  roja o una  $K_t$  azul. Por otro lado, si  $d_{F'}(v) \leq r(s-1, t) - 2$  (pues  $d_{F'}(v)$  es par), entonces  $d_{H'}(v) \geq r(s, t-1)$ . Así, una vez más, procediendo como antes, se concluye que  $G'$  contiene o  $K_s$  roja o  $K_t$  azul.  $\square$

También, como consecuencia del teorema anterior se tiene una cota superior para  $r(s, t)$  en términos de coeficientes binomiales. Para la prueba sólo hace falta recordar que para cualesquiera enteros positivos  $k$  y  $n$ , con  $k \leq n$ , se satisface la siguiente identidad combinatoria:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

**Corolario 9.2.1.** Para cualesquiera dos enteros positivos  $s$  y  $t$ ,

$$r(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

*Demostración.* La demostración la haremos por inducción sobre  $n = s + t$ . Como  $r(1, t) = 1$  y  $r(2, t) = t$  para todo  $t \in \mathbb{Z}^+$ , se sigue que  $r(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$  cuando  $n = s + t \leq 5$ .

Podemos asumir entonces que  $s \geq 3$  y  $t \geq 3$  y por lo tanto  $n \geq 6$ . Supongamos que  $r(s', t') \leq \binom{s'+t'-2}{s'-1}$  para  $s' + t' = k - 1$  donde  $k \geq 6$ . Veamos que para  $s, t \in \mathbb{Z}^+$  con  $s, t \geq 3$  y  $k = s + t$

$$r(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

De acuerdo con el teorema anterior,

$$\begin{aligned} r(s, t) &\leq r(s-1, t) + r(s, t-1) \\ &\leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} \\ &= \binom{s+t-2}{s-1}, \end{aligned}$$

con lo cual se completa la prueba.  $\square$

Por ejemplo, tanto el Teorema 9.2.4 como el Corolario 9.2.1 dan una cota justa para  $r(3, 3)$ , el cual sabemos que es 6. En el caso de  $r(3, 4)$  el Teorema 9.2.4 provee una cota justa (ya que tanto  $r(2, 4)$  como  $r(3, 3)$  son números pares), pero el Corolario 9.2.1 establece que  $9 = r(3, 4) \leq 10$ , es decir, la cota no es justa. Hasta ahora tenemos que la cota dada en el Corolario 9.2.1 es

justa si alguno de  $s$  y  $t$  es 1 o 2. También es exacta cuando  $s = t = 3$ . De acuerdo con dicho corolario, para todo  $t \geq 1$  se tiene que

$$r(3, t) \leq \frac{t^2 + t}{2}.$$

Sin embargo, es posible mejorar esta cota.

**Teorema 9.2.5.** Para todo entero  $t \geq 3$ ,

$$r(3, t) \leq \frac{t^2 + 3}{2}.$$

*Demostración.* Por inducción sobre  $t$ . Para  $t = 3$  sabemos que  $r(3, t) = 6 = \frac{t^2+3}{2}$ .

Supongamos entonces que  $r(3, t - 1) \leq \frac{(t-1)^2+3}{2}$  para algún  $t \geq 4$ . En virtud del Teorema 9.2.4 y de la hipótesis de inducción,

$$r(3, t) \leq r(2, t) + r(3, t - 1) \leq t + \frac{(t - 1)^2 + 3}{2} = \frac{t^2 + 4}{2} \quad (9.3)$$

Para completar la prueba veremos que la desigualdad anterior es estricta.

Si  $t$  es impar, entonces  $r(3, t) < \frac{t^2+4}{2}$  ya que  $t^2 + 4$  es impar. Supongamos entonces que  $t$  es par. Si  $r(3, t - 1) < \frac{(t-1)^2+3}{2}$ , entonces claramente la desigualdad 9.3 es estricta. Si, por el contrario,

$$r(3, t - 1) = \frac{(t - 1)^2 + 3}{2} = \frac{t^2}{2} - t + 2,$$

como  $t$  es par,  $r(3, t - 1)$  también lo es. Por lo tanto la desigualdad en (9.3) es estricta, lo cual implica lo deseado.  $\square$

Con este ajuste en la cota se tiene que  $r(3, 4) \leq 9$  y que  $r(3, 5) \leq 14$ , es decir, en ambos casos se alcanza la cota. Sin embargo, esto no siempre sucede, por ejemplo, de acuerdo con el teorema anterior,  $r(3, 6) \leq 19$  pero  $r(3, 6) = 18$ .

El Corolario 9.2.1 establece una cota superior para el número de Ramsey  $r(s, s)$ , a saber,  $r(s, s) \leq \binom{2(s-1)}{s-1}$ . Hay tres métodos por los cuales se han obtenido cotas inferiores para  $r(s, s)$ : el método constructivo, el de conteo y el probabilístico. En el método constructivo se establece una cota inferior para  $r(s, s)$  construyendo explícitamente una gráfica  $G$  de algún orden apropiado tal que  $G$  no contenga ni a  $K_s$  ni algún conjunto estable de  $s$  elementos. Se han encontrado mejores cotas con el método de conteo. A continuación damos una cota inferior exponencial para  $r(s, s)$ , la cual se atribuye a Erdős y en la cual se emplea el método de conteo.

**Teorema 9.2.6.** Para cualquier entero  $t \geq 2$ ,

$$r(t, t) \geq 2^{t/2}.$$

*Demostración.* Como  $r(2, 2) = 2$ , consideremos  $t \geq 3$ . Denotemos con  $\mathcal{G}_n$  el conjunto de todas las gráficas con conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Sea  $\mathcal{G}_n^t$  el conjunto de estas gráficas etiquetadas que tienen un clan de  $t$  vértices. Obsérvese que

$$|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}, \quad (9.4)$$

ya que cada subconjunto del conjunto de todas las  $\binom{n}{2}$  aristas, determina una gráfica en  $\mathcal{G}_n$ . Así mismo, el número de gráficas en  $\mathcal{G}_n$  que tiene un conjunto particular de  $t$  vértices como clan, es  $2^{\binom{n}{2} - \binom{t}{2}}$ . Luego, como hay  $\binom{n}{t}$  subconjuntos de  $V$  distintos con  $t$  elementos, se tiene que

$$|\mathcal{G}_n^t| \leq \binom{n}{t} 2^{\binom{n}{2} - \binom{t}{2}} \quad (9.5)$$

La desigualdad se da ya que las gráficas en  $\mathcal{G}_n^t$  que tienen más de un  $t$ -clan, son contadas más de una vez por la expresión de la derecha.

De acuerdo con (9.4) y (9.5),

$$\frac{|\mathcal{G}_n^t|}{|\mathcal{G}_n|} \leq \binom{n}{t} 2^{-\binom{t}{2}} < \frac{n^t 2^{-\binom{t}{2}}}{t!}.$$

Supongamos que  $n < 2^{t/2}$ . Entonces,

$$\frac{|\mathcal{G}_n^t|}{|\mathcal{G}_n|} < \frac{2^{t^2/2} 2^{-\binom{t}{2}}}{t!} = \frac{2^{t/2}}{t!} < \frac{1}{2}.$$

En otras palabras, si  $n < 2^{t/2}$ , entonces menos de la mitad de las gráficas de  $\mathcal{G}_n$  contienen un  $t$ -clan. Así mismo, por complementariedad, menos de la mitad de las gráficas de  $\mathcal{G}_n$  contiene un conjunto estable de  $t$  vértices. Por lo tanto, alguna gráfica de  $\mathcal{G}_n$  no contiene ni un  $t$ -clan ni un conjunto estable con  $t$  elementos. Como esto se cumple para cualquier  $n < 2^{t/2}$ , concluimos finalmente que  $r(t, t) \geq 2^{t/2}$ .  $\square$

Una  $(s, t)$ -**gráfica de Ramsey** es una gráfica de orden  $r(s, t) - 1$  que no contiene ni una subgráfica completa de orden  $s$  ni un conjunto estable con  $t$  vértices. De acuerdo con el Teorema de Ramsey dichas gráficas existen para todo  $s \geq 2$  y  $t \geq 2$ . Las gráficas de Ramsey suelen tener estructuras interesantes. Por ejemplo, todas las gráficas en Figura 9.2 son gráficas de Ramsey; las últimas dos se pueden obtener de campos finitos de la siguiente

manera. La  $(3, 5)$ -gráfica de Ramsey se obtiene al tomar a los trece vértices como elementos del campo de enteros módulo 13 y uniendo dos vértices con una arista siempre y cuando su diferencia sea un residuo cúbico de 13 (esto es, 1, 5, 8 o 12); la  $(4, 4)$ -gráfica de Ramsey se obtiene de considerar a los vértices como elementos del campo de enteros módulo 17 y uniendo dos vértices con una arista siempre y cuando su diferencia sea un residuo cuadrático de 17 (esto es, 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 o 16). Para  $s \in \{2, 3, 4\}$ , la  $(s, s)$ -gráfica de Ramsey es auto complementaria (es decir, isomorfa a su complemento). Sin embargo, hasta ahora no se sabe si esto se cumple para todo valor de  $s$ .

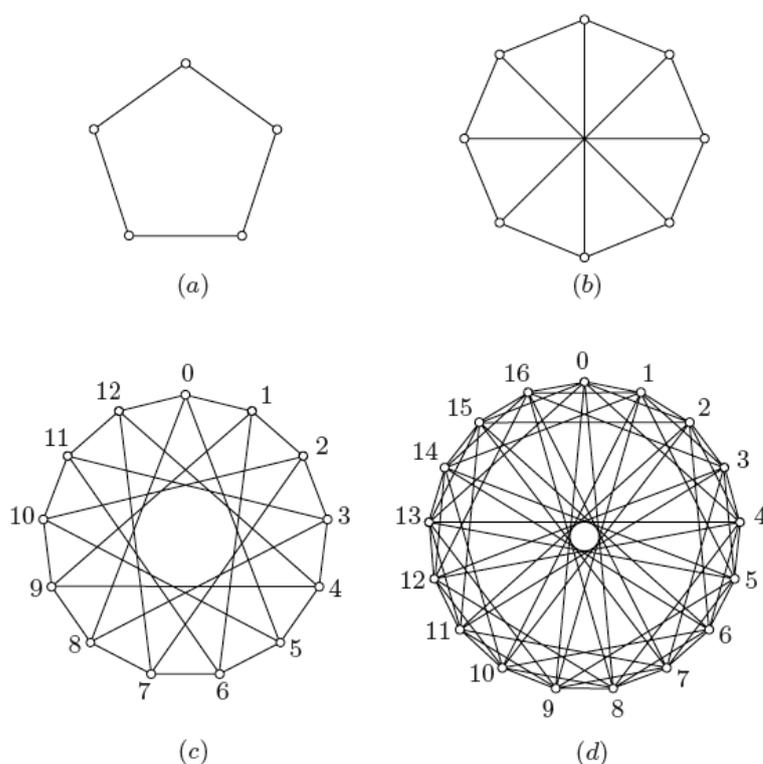


Figura 9.2: (a) Una  $(3, 3)$ -gráfica de Ramsey, (b) una  $(3, 4)$ -gráfica de Ramsey, (c)  $(3, 5)$ -gráfica de Ramsey y (d)  $(4, 4)$ -gráfica de Ramsey,

Anteriormente vimos que  $r(P_3, K_3) = 5$  y que  $r(P_4, K_4) = 10$ . Vašek Chvátal generalizó esto de manera considerable al encontrar el valor exacto de  $r(T, H)$  cuando  $T$  es un árbol y  $H$  cualquier gráfica completa.

**Teorema 9.2.7.** Para todo árbol  $T_p$  de orden  $p \geq 2$  y todo entero  $n \geq 2$ ,

$$r(T_p, K_n) = (p - 1)(n - 1) + 1.$$

*Demostración.* Primero veremos que  $r(T, K_n) \geq (p-1)(n-1) + 1$ . Consideremos una coloración rojo-azul de la gráfica completa  $K_{(p-1)(n-1)}$  tal que la subgráfica roja sea  $(n-1)K_{p-1}$ ; esto es, la subgráfica roja consiste de  $n-1$  copias de  $K_{p-1}$ . Como cada componente de la subgráfica roja tiene orden  $p-1$ , ésta no contiene una subgráfica conexa de orden mayor a  $p-1$ . En particular, no hay árbol alguno de orden  $p$ . La subgráfica azul es entonces la gráfica  $(n-1)$ -partita completa  $K_{p-1, p-1, \dots, p-1}$ , en la cual cada parte contiene exactamente  $p-1$  vértices. Por lo que tampoco hay alguna  $K_n$  azul. Como esta 2-arista coloración de  $K_{(p-1)(n-1)}$  no contiene ni un  $T$  rojo ni alguna  $K_n$  azul,  $r(T, K_n) \geq (p-1)(n-1) + 1$ .

Probaremos ahora que  $r(T, K_n) \leq (p-1)(n-1) + 1$  para algún árbol arbitrario, pero fijo,  $T$  de orden  $p \geq 2$  y un entero  $n \geq 2$ . Verificaremos la desigualdad por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 2$ , veamos que  $r(T, K_2) \leq (p-1)(2-1) + 1 = p$ . Como  $r(K_p, K_2) = r(p, 2) = p$ , toda coloración rojo-azul de  $K_p$  produce una  $K_p$  roja o una  $K_2$  azul. Por lo tanto,  $r(T, K_2) \leq p$ . De este modo, la desigualdad  $r(T, K_n) \leq (p-1)(n-1) + 1$  se satisface cuando  $n = 2$ . Supongamos que para un entero  $k \geq 2$  se cumple que

$$r(T, K_k) \leq (p-1)(k-1) + 1.$$

De manera que toda coloración rojo-azul de  $K_{(p-1)(k-1)+1}$  contiene o un árbol  $T$  rojo o una  $K_k$  azul. Probaremos a continuación que

$$r(T, K_{k+1}) \leq (p-1)k + 1.$$

Consideremos una coloración cualquiera rojo-azul de  $K_{(p-1)k+1}$ . Veremos que hay o un árbol  $T$  rojo o una  $K_{k+1}$  azul. Se tienen dos casos posibles.

**Caso 1.** Existe un vértice  $v$  en  $K_{(p-1)k+1}$  en el cual inciden al menos  $(p-1)(k-1) + 1$  aristas azules. Supongamos que  $vv_i$  es una arista azul para  $1 \leq i \leq (p-1)(k-1) + 1$ . Consideremos la gráfica  $H$  inducida por el conjunto  $\{v_i \mid 1 \leq i \leq (p-1)(k-1) + 1\}$ . Entonces,  $H = K_{(p-1)(k-1)+1}$ . De acuerdo con la hipótesis de inducción,  $H$  contiene o un árbol  $T$  rojo o una completa  $K_k$  azul. Si  $H$  contiene un árbol  $T$  rojo, también  $K_{(p-1)k+1}$  lo contiene. Por otro lado, si  $H$  contiene una  $K_k$  azul, entonces, al  $v$  estar conectado con todo vértice de  $H$  con una arista azul, existe una  $K_{k+1}$  azul en  $K_{(p-1)k+1}$ .

**Caso 2.** En todo vértice de  $K_{(p-1)k+1}$  inciden a lo más  $(p-1)(k-1)$  aristas azules. En consecuencia, en todo vértice de  $K_{(p-1)k+1}$  inciden al menos  $p-1$  aristas rojas. Por lo que, la subgráfica roja de  $K_{(p-1)k+1}$  tiene grado mínimo al menos  $p-1$ ; lo cual implica que esta subgráfica roja contiene un árbol  $T$  rojo [Teorema 9.1.7]. Por lo tanto  $K_{(p-1)k+1}$  también contiene un  $T$  rojo.  $\diamond$

□

Probemos ahora otro resultado sobre los números de Ramsey.

**Teorema 9.2.8.** Para  $l \geq 1$  y  $p \geq 2$

$$r(lK_2, K_p) = 2l + p - 2.$$

*Demostración.* Consideremos la coloración de  $K_{2l+p-3}$  que consiste en colorear  $K_{2(l-1)}$  de color rojo y el resto de las aristas de  $K_{2l+p-3}$  de color azul. Es claro entonces que con dicha coloración  $K_{2l+p-3}$  no contiene  $l$  aristas independientes de color rojo, ni una completa  $K_p$  de color azul. Por lo tanto,  $r(lK_2, K_p) \geq 2l + p - 2$ .

Consideremos una 2-arista coloración de  $G = K_{2l+p-2}$  y supongamos que ésta no contiene  $lK_2$  rojo. Sea  $S$  un apareamiento máximo en  $G_R$ , la subgráfica roja de  $G$ . Si  $|S| = l$ , entonces  $G$  contiene  $lK_2$  rojo. Supongamos entonces que  $|S| = s \leq l - 1$ . El conjunto de vértices de  $G$  que no forman parte de estas  $s$  aristas independientes y rojas está conformado por  $n - 2s \geq 2l + p - 2 - 2(l - 1) = p$  vértices; los cuales no pueden estar conectados por aristas rojas, de lo contrario  $s$  no sería máximo. Por lo tanto, estos inducen una gráfica completa azul de orden al menos  $p$ , es decir,  $G$  contiene  $K_p$  azul. □

### Números de Ramsey para tres o más gráficas

El teorema de Ramsey sugiere que el número de Ramsey  $r(F, H)$  de dos gráficas  $F$  y  $H$  se puede extender a más de dos gráficas. Para  $k \geq 3$  y gráficas  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , el **número de Ramsey**  $r(G_1, G_2, \dots, G_k)$  se define como el menor entero positivo  $n$  tal que toda  $k$ -arista coloración (no necesariamente propia) de  $K_n$  contiene una  $G_i$   $i$ -monocromática, para algún  $1 \leq i \leq k$ . El Teorema de Ramsey garantiza la existencia de dichos números, aunque también se puede probar su existencia utilizando que  $r(F, H)$  existe para cualesquiera gráficas  $F$  y  $H$ .

Notemos que, sea  $k \geq 2$ , por vacuidad, si para algún  $1 \leq i \leq k$ ,  $n_i = 1$  entonces,  $r(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1$ .

**Lema 9.2.1.** Para cualesquiera enteros  $k, n_1, \dots, n_k \geq 2$ ,

$$r(n_1, n_2, \dots, n_k) \leq 2 + \left( \sum_{i=1}^k r(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k) - 1 \right).$$

*Demostración.* Sean  $k \geq 2$  y  $n = 2 + \left( \sum_{i=1}^k r(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k) - 1 \right)$ . De manera que todo vértice de  $K_n$  tiene grado

$$n - 1 = 1 + \left( \sum_{i=1}^k r(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k) - 1 \right).$$

Consideremos una  $k$ -arista coloración de  $G = K_n$ . Sea  $v$  un vértice de  $G$ . Denotemos con  $d_j(v)$  el número de aristas de color  $j$  que inciden en  $v$ ; de manera que  $d(v) = \sum_{i=1}^k d_i(v)$ . De acuerdo con la elección de  $n$ , existe  $j \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $d_j(v) \geq r(n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots, n_k)$ . Sea  $N^j(v) = \{u \in V(G) \mid uv \text{ es de color } j\}$ . Consideremos entonces la subgráfica  $G' = G[N^j(v)]$ . Como  $G' = K_p$  para algún  $p \geq r(n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots, n_k)$ , entonces o  $G'$  contiene una  $K_{n_i}$   $i$ -cromática para algún  $i \neq j$ , o  $G'$  contiene una  $K_{n_j-1}$   $j$ -cromática. En este último caso  $K_{n_j-1}$  junto con  $v$  y las aristas que hay entre estos vértices, forman una  $K_{n_j}$   $j$ -cromática.  $\square$

**Proposición 9.2.2.** Para cualesquiera  $k \geq 2$  y  $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$r(n_1, n_2, \dots, n_k) = r(n_1, n_2, \dots, n_k, 2).$$

*Demostración.* Consideremos una  $(k+1)$ -arista coloración de  $K_{r(n_1, n_2, \dots, n_k)}$ . Si no utiliza el color  $k+1$  es en realidad una  $k$ -arista coloración y por lo tanto contiene una  $K_{n_i}$   $i$ -cromática para algún  $1 \leq i \leq k$ . Si el color  $k+1$  si se utiliza entonces existe  $K_2$   $(k+1)$ -cromática. Por lo tanto

$$r(n_1, n_2, \dots, n_k, 2) \leq r(n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Por otro lado, como toda  $k$ -arista coloración de  $K_{r(n_1, n_2, \dots, n_k, 2)}$  se puede considerar como una  $(k+1)$ -arista coloración que no utilice el color  $k+1$ ,

$$r(n_1, n_2, \dots, n_k) \leq r(n_1, n_2, \dots, n_k, 2).$$

Con lo cual concluimos la prueba.  $\square$

**Teorema 9.2.9.** Para cualesquiera naturales  $k, n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2$ ,  $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$ , existe.

*Demostración.* Sea  $k \geq 2$ . La prueba la haremos por inducción sobre  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ . Sabemos que  $r(2, 2) = 2$ . Así, en virtud de la Proposición 9.2.2, si  $n_i = 2$  para todo  $1 \leq i \leq k$ , entonces  $r(n_1, \dots, n_k) = 2$ . Con lo cual se tiene la base inductiva para  $n = 2k$ .

Supongamos que para algún  $n \geq 2k$  se tiene que si  $n_1, n_2, \dots, n_k$  son enteros mayores o iguales que 2, con  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ , entonces,  $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$  existe.

Consideremos  $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2$  y tales que  $\sum_{i=1}^k n_i = n + 1$ . De acuerdo con el Lema 9.2.1,  $r(n_1, n_2, \dots, n_k) \leq 2 + \left( \sum_{i=1}^k r(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k) - 1 \right)$ . Así, en virtud de la hipótesis de inducción,  $r(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_k)$  existe para cada  $i$  en la suma ya que la suma de estos números es siempre  $n + 1 - 1 = n$ . Por lo tanto,  $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$  existe.  $\square$

Combinando la Proposición 9.2.2 y el Lema 9.2.1, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 9.2.3.** Si  $n_i = 3$  para todo  $1 \leq i \leq k$ , entonces

$$r(n_1, n_2, \dots, n_k) \leq 3k!.$$

A continuación ponemos otra prueba de la existencia de los números de Ramsey que utiliza otra propiedad importante.

**Teorema 9.2.10.** Para  $k \geq 2$  y enteros positivos  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , el número de Ramsey  $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$ , existe.

*Demostración.* Hagamos la demostración por inducción sobre  $k$ . El caso para  $k = 2$  se probó en el Teorema 9.2.4. Ya habíamos mencionado que para cualquier  $k \geq 2$ , si  $n_i = 1$  para algún  $1 \leq i \leq k$ , entonces  $r(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1$ . Supongamos que  $r(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})$  existe para cualesquiera  $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2$ . Afirmamos entonces que  $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$  existe y que satisface

$$r(n_1, n_2, \dots, n_k) \leq r(r(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}), n_k).$$

Sea  $n' = r(r(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}), n_k)$  y consideremos una  $k$ -arista coloración de  $K_{n'}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , sea  $A_i$  el conjunto de aristas de  $K_{n'}$  de color  $i$ . Ésta la podemos ver como una 2-arista coloración de  $K_{n'}$ , al identificar los primeros  $k - 1$  colores con un nuevo color  $k'$ . Así, de acuerdo con el Teorema 9.2.4,  $K_{n'}$  contiene una  $K_{n_k}$  de color  $k$  o una  $K_{r(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})}$  de color  $k'$ ; y de acuerdo con la hipótesis de inducción, esto último implica que, fijándonos nuevamente en la  $k$ -arista coloración de  $K_{n'}$ ,  $K_{n'}$  contiene una  $K_{n_i}$   $i$ -cromática, para algún  $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ .  $\square$

**Corolario 9.2.2.** Para  $k \geq 2$  y gráficas  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , el número de Ramsey  $r(G_1, G_2, \dots, G_k)$ , existe.

Si  $G_i = K_{n_i}$  para todo  $1 \leq i \leq k$ , entonces el número  $r(G_1, G_2, \dots, G_k)$  se denota simplemente como  $r(n_1, n_2, \dots, n_k)$ . Cuando las gráficas  $G_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) son todas gráficas completas de orden menor o igual que 3 y  $k \geq 3$ , sólo se conoce el número de Ramsey  $r(3, 3, 3)$ . El siguiente resultado se debe a Robert E. Greenwood y Andrew M. Gleason.

**Teorema 9.2.11.**  $r(3, 3, 3) = 17$

*Demostración.* Consideremos una 3-arista coloración de  $K_{17}$  con los colores rojo, azul y verde y sea  $v$  un vértice de  $K_{17}$ . Como  $v$  tiene grado 16, en  $v$  inciden 6 aristas de un mismo color, digamos  $vv_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) coloreadas todas verde. Sea  $H = K_6$  la subgráfica inducida por  $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ . Si cualquiera de las aristas de  $H$  está coloreada verde, entonces  $K_{17}$  tiene un triángulo verde. Supongamos entonces que ninguna arista en  $H$  es verde. De manera que toda arista de  $H$  está coloreada con rojo o con azul. Como  $H = K_6$  y  $r(3, 3) = 6$ , se sigue que  $H$  y por tanto  $K_{17}$  también, contiene o un triángulo rojo o un triángulo azul. En consecuencia,  $r(3, 3, 3) \leq 17$ .

Para probar que  $r(3, 3, 3) = 17$  sólo hace falta probar que existe una 3-arista coloración de  $K_{16}$  que no contiene triángulos monocromáticos. De hecho, existe una factorización isomórfica<sup>4</sup> de  $K_{16}$  en una gráfica sin triángulos a la cual se le conoce como **gráfica de Clebsch** (en honor a Alfred Clebsch quien la descubrió en 1868) o como la **gráfica de Greenwood-Gleason**. Esta gráfica puede ser construida a partir de la gráfica de Petersen con vértices  $u_i$  y  $v_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ), como se ilustra en la Figura 9.3 por vértices y aristas de color obscuro y sólido. Luego se le agregan 6 nuevos vértices, digamos  $x$  y  $w_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ). La gráfica de Clebsch  $CG$  (una gráfica 5-regular de orden 16) se construye como se muestra en la Figura 9.3. Esta gráfica tiene la propiedad de que para todo vértice  $v$  de  $CG$ , la subgráfica  $CG - N[v]$  es isomorfa a la gráfica de Petersen  $\square$

Para probar el siguiente resultado sobre otro número de Ramsey utilizaremos el hecho de que si  $G$  es una gráfica de orden  $n \geq 3$  tal que  $d_G(u) + d_G(v) \geq n$  para cualesquiera vértices distintos  $u$  y  $v$ , no adyacentes, entonces  $G$  es pancíclica<sup>5</sup> o  $n$  es par y  $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ .

**Teorema 9.2.12.**  $r(K_{1,3}, K_{1,5}, C_5) = 15$ .

*Demostración.* Primero consideremos la arista coloración de  $K_{14}$  en la cual toda arista de  $K_{7,7}$  esté coloreada verde. En este punto toda arista de  $2K_7$  está sin colorear. Como  $K_7$  puede ser factorizada en 3 ciclos Hamiltonianos, podemos colorear de rojo las aristas de un ciclo Hamiltoniano en cada copia de  $K_7$  y las aristas restantes de color azul. La gráfica azul es entonces 4-regular en  $2K_7$ . Con esta arista coloración, no hay ni un  $K_{1,3}$  rojo, ni un  $K_{1,5}$  azul ni un  $C_5$  verde. Por lo tanto,  $r(K_{1,3}, K_{1,5}, C_5) \geq 15$ .

<sup>4</sup>Si una gráfica  $G$  es factorizable con  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , donde cada  $G_i \cong H$  para alguna gráfica  $H$ , entonces se dice que  $G$  es  $H$ -factorizable y que  $G$  tiene una factorización isomórfica.

<sup>5</sup>Una gráfica  $G$  de orden  $n \geq 3$  es **pancíclica** si  $G$  contiene un ciclo de longitud  $l$  para todo  $3 \leq l \leq n$ .

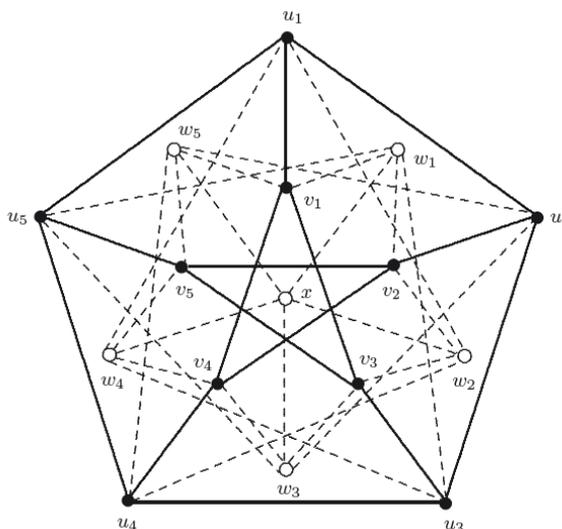


Figura 9.3: La gráfica de Clebsch

Consideremos una 3-arista coloración de  $G = K_{15}$  con los colores rojo, azul y verde. y supongamos que no existen ni  $K_{1,3}$  roja ni  $K_{1,5}$  azul. Entonces, en todo vértice de  $G$  inciden al menos 8 aristas verdes. En consecuencia en la subgráfica verde de  $G$ ,  $H$ ,  $d_H(v) \geq 8$  para todo vértice  $v$  de  $H$ . Por lo tanto,  $d_H(u) + d_H(v) \geq 16$  para cualesquiera  $u, v$  no adyacentes en  $H$ . Como  $H$  tiene orden 15,  $H$  es pancíclica y por lo tanto,  $G$  contiene un  $C_5$  verde. Con lo cual podemos concluir finalmente que  $r(K_{1,3}, K_{1,5}, C_5) = 15$ .  $\square$

### 9.2.2. Números de Ramsey arcoíris

Recordemos que dadas dos gráficas  $F$  y  $G$ , si bajo una arista-coloración de  $G$ , ésta contiene una subgráfica  $H$  isomorfa a  $F$  cuyas aristas sean todas de un mismo color, entonces se refiere a ésta como una  $F$  monocromática. Ahora, consideremos el caso en el que todas las aristas de  $H$  son de distinto color, entonces diremos que  $H$  es una  $F$  arcoíris.

**Definición 9.2.2.** Sea  $F$  una gráfica no vacía. El **número de Ramsey arcoíris** de  $F$ ,  $RR(F)$  es el mínimo entero positivo  $n$  tal que si cada arista de la gráfica completa  $K_n$  es coloreada con cualquier conjunto de colores, entonces se forma una  $F$  monocromática o una  $F$  arcoíris.

Como primer ejemplo consideremos la trayectoria de orden 3,  $P_3$ . El orden de ésta es 3, de manera que  $RR(P_3) \geq 3$ . Además es claro que cualquier arista coloración de  $K_3$  contiene una  $P_3$  monocromática o una  $P_3$  arcoíris,

por lo tanto  $RR(P_3) = 3$ . Agreguemos una arista para familiarizarnos con el término, es decir, pensemos en el número de Ramsey arcoíris de  $K_3$ . Para esto consideremos la arista coloración de  $K_n$  ( $n \geq 3$ ) con conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y una arista coloración con conjunto de colores  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  de tal manera que para todo  $1 \leq i < j \leq n$ , la arista  $v_i v_j$  es de color  $i$ . Es claro que  $K_n$  coloreada de esta forma no contiene ni un triángulo monocromático ni un triángulo arcoíris, por lo tanto  $RR(K_3)$  no está bien definido. La pregunta natural es entonces para qué gráficas está definido el número de Ramsey arcoíris.

El tipo de coloración empleada para probar que  $RR(K_3)$  no está definido es muy útil cuando se trabaja con los números de Ramsey arcoíris. A continuación definimos una generalización de este tipo de coloraciones.

Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  el conjunto de vértices de una gráfica completa  $K_n$ . Una arista coloración de  $K_n$  que utiliza como colores números enteros positivos es llamada **coloración mínima** si dos aristas  $v_i v_j$  y  $v_k v_\ell$  están coloreadas de un mismo color si y sólo si

$$\min\{v_i, v_j\} = \min\{v_k, v_\ell\};$$

mientras que una arista coloración de  $K_n$  que utiliza como colores números enteros positivos es llamada **coloración máxima** si dos aristas  $v_i v_j$  y  $v_k v_\ell$  están coloreadas de un mismo color si y sólo si

$$\max\{v_i, v_j\} = \max\{v_k, v_\ell\};$$

En 1950 Paul Erdős y Richard Rado demostraron que si las aristas de una gráfica suficientemente grande son coloreadas con un conjunto de números enteros positivos, entonces debe de existir una subgráfica completa de un orden dado que es monocromática, o arcoíris o la coloración dada restringida a dicha subgráfica es una coloración mínima o una coloración máxima. A continuación enunciamos esto como teorema, el cuya demostración omitimos.

**Teorema 9.2.13.** Para todo entero positivo  $p$ , existe un entero positivo  $n$  tal que si todas las aristas de  $K_n$  son coloreadas a partir de un conjunto de enteros positivos, entonces hay subgráfica completa de orden  $p$  que es o monocromática o arcoíris, o la coloración restringida a dicha subgráfica es una coloración mínima o máxima.

Con este teorema, Bialostocki y Voxman determinaron todas las gráficas  $F$  para las cuales  $RR(F)$  está definido.

**Teorema 9.2.14.** Sea  $F$  una gráfica sin vértices aislados. El número de Ramsey arcoíris  $RR(F)$  está definido si y sólo si  $F$  es un bosque.

*Demostración.* Sea  $F$  una gráfica de orden  $p \geq 2$ . Primero probaremos que  $RR(F)$  sólo si  $F$  es un bosque. Supongamos que  $F$  no es un bosque. Por lo tanto  $F$  contiene un ciclo  $C$ , digamos que de longitud  $k \geq 3$ . Sean  $n$  un entero tal que  $n \geq p$  y  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  el conjunto de vértices de una gráfica completa  $K_n$ . Defínase una arista coloración de  $K_n$ ,  $c$ , como  $c(v_i v_j) = i$  si  $i < j$ . De manera que  $c$  es una arista coloración mínima de  $K_n$ . Si  $k$  es el mínimo entero positivo tal que  $v_k$  pertenece a  $C$ , entonces dos aristas de  $C$ , y sólo dos, están coloreadas con el color  $k$  de manera que no hay ni un  $F$  monocromático ni un  $F$  arcoíris. Por lo tanto  $RR(F)$  no está definido.

Para el regreso, supongamos que  $F$  es un bosque de orden  $p \geq 2$ . De acuerdo con el Teorema 9.2.13, existe un entero  $n \geq p$  tal que para toda arista coloración de  $K_n$  con enteros positivos, existe una subgráfica completa  $G$  de orden  $p$  de  $K_n$  que es o monocromática, o arcoíris o que tiene una coloración mínima o máxima. Si  $G$  es monocromática o arcoíris, entonces  $K_n$  contiene un  $F$  monocromático o arcoíris. Asumamos entonces que  $G$  tiene una coloración mínima o máxima, digamos la primera. Probaremos que en este caso  $G$  contiene un  $F$  arcoíris. Si  $F$  no es un árbol, podemos agregar aristas a  $F$  para producir un árbol  $T$  de orden  $p$ . Sea

$$V(G) = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}\},$$

donde  $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ . Elegimos un vértice  $v = v_{i_p}$  de  $T$  y etiquetemos los vértices de  $T$  en el orden

$$v = v_{i_p}, v_{i_{p-1}}, \dots, v_{i_2}, v_{i_1}$$

de acuerdo con la distancia a  $v$ , es decir,

$$d(v_{i_j}, v) \geq d(v_{i_{j+1}}, v)$$

para todo entero  $j$  con  $1 \leq j \leq p-1$ . Por lo tanto existe exactamente una arista de  $T$  con el color  $i_j$  para cada  $1 \leq j \leq p-1$ . En consecuencia  $T$  y por lo tanto  $F$  es arcoíris. El número de Ramsey arcoíris es entonces definido.  $\square$

**Proposición 9.2.4.** Para todo entero  $k \geq 2$ ,  $RR(K_{1,k}) = (k-1)^2 + 2$ .

*Demostración.* Primero veamos que  $RR(K_{1,k}) \geq (k-1)^2 + 2$ . Para esto, sea  $n = (k-1)^2 + 1$ . Lo que buscamos es probar que existe una arista coloración de  $K_n$  que no contiene ni  $K_{1,k}$  monocromática ni  $K_{1,k}$  arcoíris. Notemos que la paridad de  $n$  es igual que la de  $k$ , de acuerdo con esta observación se tienen dos casos posibles.

**$k$  impar.** Entonces,  $n$  es par y por lo tanto  $K_n$  admite una factorización Hamiltoniana en  $\frac{n-1}{2} = \frac{(k-1)^2}{2}$  ciclos Hamiltonianos. Hagamos una partición de dicho conjunto de ciclos en  $k-1$  conjuntos  $S_i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ), cada uno con  $\frac{k-1}{2}$  de los ciclos Hamiltonianos. Para cada  $i$ , coloreamos las aristas de todos los ciclos de  $S_i$  de color  $i$ . Se obtiene entonces una  $(k-1)$ -arista coloración de  $K_n$ . Al ser  $(k-1)$ -arista coloración, no existe  $K_{1,k}$  arcoíris. Más aún, si existe  $K_{1,k}$  monocromática, entonces hay en  $K_n$  un vértice  $v$  en el cual inciden al menos  $k+1$  aristas de un mismo color (pues  $k$  es impar y la coloración se hizo por ciclos Hamiltonianos), lo cual implica que hay por lo menos  $\frac{k+1}{2}$  ciclos en un mismo  $S_i$ , lo cual es imposible.

**$k$  par.** En este caso, como esto implica que  $n$  también es impar, factorizamos  $K_n$  en  $n-1 = (k-1)^2$  1-factores. Hagamos una partición de estos  $(k-1)^2$  1-factores en  $k-1$  conjuntos  $S_i$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ), cada uno con  $\frac{k-1}{2}$  1-factores. Coloreemos cada arista de todos los 1-factores de  $S_i$  de color  $i$ , para cada  $i$ . Nuevamente, como estamos considerando únicamente  $k-1$  colores, no existe una  $K_{1,k}$  monocromática. Además, como cada conjunto  $S_i$  tiene  $\frac{k-1}{2}$  1-factores, no existe  $K_{1,k}$  monocromático, de lo contrario habría un vértice  $v$  en el cual inciden  $k$  aristas del mismo color, cada una de un 1-factor distinto pero todas pertenecientes a un mismo  $S_i$ , lo cual es imposible.

Por lo tanto  $RR(K_{1,k}) \geq (k-1)^2 + 2$ . Falta probar la otra desigualdad, para lo cual hay que verificar que toda arista coloración de  $K_{(k-1)^2+2}$  contiene una  $K_{1,k}$  monocromática o arcoíris.

Sea  $N = (k-1)^2 + 2$  y consideremos una arista coloración arbitraria de  $K_N$ . Supongamos que  $K_N$  con dicha coloración no contiene  $K_{1,k}$  monocromática. Sea  $v \in V(K_N)$ . Como  $d(v) = N-1 = (k-1)^2 + 1$  y no existe  $K_{1,k}$  monocromática, en  $v$  inciden a lo más  $k-1$  aristas del mismo color, por lo tanto, al menos  $\lceil \frac{N-1}{k-1} \rceil$  aristas inciden en  $v$  y son de diferente color. Pero  $\lceil \frac{N-1}{k-1} \rceil = \lceil \frac{(k-1)^2+1}{k-1} \rceil = k$ , en consecuencia, existe  $K_{1,k}$  arcoíris.  $\diamond$   $\square$

De manera un poco más general, para cualesquiera dos gráficas no vacías  $F_1$  y  $F_2$ , el **número de Ramsey arcoíris**,  $RR(F_1, F_2)$ , se define como el menor entero positivo  $n$  tal que si cada arista de  $K_n$  es coloreada con cualquier conjunto de colores, entonces existe un  $F_1$  monocromática o una  $F_2$  arcoíris. De acuerdo con lo que hemos visto hasta ahora, es claro que dicha generalización tampoco está definida para cualesquiera dos gráficas  $F_1$  y  $F_2$ . A continuación enunciamos un teorema, cuya demostración omitiremos, que indica para qué gráficas sí está bien definido el número de Ramsey arcoíris generalizado.

**Teorema 9.2.15.** Sean  $F_1$  y  $F_2$  dos gráficas sin vértices aislados. El número de Ramsey arcoíris,  $RR(F_1, F_2)$  está definido si y sólo si  $F_1$  es una estrella o  $F_2$  es un bosque.

Calculemos, por ejemplo, el número  $RR(K_{1,3}, K_3)$ .

**Proposición 9.2.5.**  $RR(K_{1,3}, K_3) = 6$ .

*Demostración.* Con la descomposición de  $K_5$  en dos ciclos Hamiltonianos, cada uno de los cuales coloreados de un color distinto, como no contiene ni  $K_{1,3}$  monocromática (en cada vértice inciden exactamente dos aristas de cada color), ni contiene  $K_3$  arcoíris (pues sólo hay dos colores) se tiene que  $RR(K_{1,3}, K_3) \geq 6$ .

Ahora veamos que  $RR(K_{1,3}, K_3) \leq 6$ . Supongamos que existe una arista coloración de  $K_6$  que no contiene ni  $K_{1,3}$  monocromática, ni contiene  $K_3$  arcoíris. Sea  $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ . De acuerdo con lo anterior, en  $v_1$  inciden al menos 3 aristas de distinto color. Supongamos que  $c(v_1v_i) = i - 1$  para  $2 \leq i \leq 4$ . Como no existe  $K_3$  arcoíris,  $v_2v_3$  es color 1 o 2. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $c(v_1v_2) = 1$ . Luego, como no hay  $K_3$  arcoíris, fijándonos en el triángulo  $v_2v_1v_4$  se tiene que  $c(v_2v_4) \in \{1, 3\}$ , pero como tampoco hay  $K_{1,3}$  monocromática,  $c(v_2v_3) = 3$ . Por último, como no hay  $K_{1,3}$  monocromática,  $c(v_3v_4) \neq 3$ , pero tampoco hay  $K_3$  arcoíris, por lo tanto  $c(v_3v_4) = 2$ , lo cual genera el triángulo arcoíris  $v_2v_3v_4$ , en contradicción con la hipótesis.  $\square$

Notemos que, en virtud del Teorema 9.2.15,  $R(K_5, P_5)$  está definido mientras que  $R(P_5, K_5)$  no lo está. De manera que no siempre sucede que  $RR(F_1, F_2) = RR(F_2, F_1)$ , aún existiendo ambos números, no necesariamente son iguales.

**Tarea:** Dar un ejemplo de dos gráficas  $F_1$  y  $F_2$ , cada uno de orden al menos 4, tales que tanto  $RR(F_1, F_2)$  como  $RR(F_2, F_1)$  existan, pero  $RR(F_1, F_2) \neq RR(F_2, F_1)$ .

### Número arcoíris de gráficas

Sean  $F$  una gráfica de orden  $p$  sin vértices aislados y  $n \geq p$ , el **número arcoíris**  $rb_n(F)$  de  $F$  es el menor entero positivo  $k$  tal que toda  $k$ -arista coloración de  $K_n$  en la cual cada color es asignado a al menos una arista (coloración suprayectiva) resulta en una  $F$  arcoíris. Ciertamente toda  $\binom{n}{2}$ -arista coloración suprayectiva de  $K_n$  resulta en una  $F$  arcoíris, independientemente de la elección de  $F$ . Un parámetro cercano a éste es el **número anti Ramsey**  $ar_n(F)$  de  $F$ , definido como el máximo número de colores que se

pueden usar en una arista coloración de  $K_n$  sin producir un  $F$  arcoíris. Por lo tanto,

$$rb_n(F) = ar_n(F) + 1.$$

Veamos algunos ejemplos. Recordemos que en esta sección siempre que hablemos de una arista coloración estamos pensando en coloraciones suprayectivas.

**Ejemplo 9.2.16.**  $rb_n(P_3) = 2$  para todo  $n \geq 3$ .

Para probar esto sólo hace falta notar que en toda 2-arista coloración de  $K_n$  ( $n \geq 3$ ), siempre existen dos aristas adyacentes con distinto color.

**Ejemplo 9.2.17.**  $rb_n(2K_2) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 4 \\ 2 & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$ .

*Demostración.* Como el orden de  $2K_2$  es 4, se sigue que  $rb_n(2K_2)$  está definido para  $n \geq 4$ . Si  $n \geq 5$ , cualquier 2-arista coloración de  $K_n$ , como notamos anteriormente, contiene dos aristas adyacentes de color distinto, digamos  $v_1v_2$  de color 1 y  $v_1v_3$  de color 2. Sin importar el color de la arista  $v_4v_5$  con alguna de  $v_1v_2$  o  $v_1v_3$  se forma un  $2K_2$  arcoíris.

Si  $n = 4$ , como  $K_4$  tiene una factorización en 3 1-factores, cada uno de estos isomorfo a  $2K_2$ , toda 4-arista coloración de  $K_4$  contiene un 1-factor cuyas aristas tienen 2 colores distintos. Por lo tanto hay una  $2K_2$  arcoíris.  $\square$

**Proposición 9.2.6.** Para todo entero  $n \geq 4$ ,  $rb_n(P_4) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 4 \\ 3 & \text{si } n \geq 5. \end{cases}$  53

*Demostración.* Tarea.  $\square$

**Teorema 9.2.18.** Para todo  $n \geq 3$ ,  $rb_n(K_3) = n$ .

*Demostración.* Sea  $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Primero veamos que  $rb_n(K_n) \geq n$ . Consideremos la arista coloración mínima de  $K_n$  en la cual a  $v_iv_j$  se le asigna el color  $i$  siempre y cuando  $1 \leq i < j \leq n$ . ésta es entonces una  $(n-1)$ -coloración de  $K_n$  sin triángulos arcoíris.

Ahora veamos que  $rb_n(K_n) \leq n$ . Sea  $c$  cualquier arista coloración de  $K_n$  con  $n$  colores. Dentro de todas las subgráficas arcoíris de  $K_n$  de tamaño  $n$  y orden  $n$ , sea  $H$  una que contenga un ciclo  $C$  de longitud mínima<sup>6</sup>. De manera que  $C$  es un ciclo arcoíris. Si  $C$  es un triángulo ya terminamos. Supongamos entonces que  $C$  es un  $k$ -ciclo, con  $4 \leq k \leq n$ . Sea  $uv$  una cuerda de  $C$  en  $K_n$ . Por lo tanto, hay dos  $(u, v)$ -trayectorias,  $P'$  y  $P''$  en  $C$ , cada una de longitud

<sup>6</sup>Debe de existir al menos un ciclo ya que el tamaño de la subgráfica arcoíris es igual a su orden.

mayor o igual a 2. Tanto  $P' + uv$  como  $P'' + uv$  producen ciclos  $C'$  y  $C''$ , respectivamente, de longitud menor que  $k$ . Como a lo más una de entre  $P'$  y  $P''$  contiene una arista del mismo color que  $uv$ , entonces  $C'$  o  $C''$  es un ciclo arcoíris cuya longitud es menor que  $k$ , lo cual es imposible. Por lo tanto  $C$  es un triángulo.  $\square$

Por último, sean  $k$  y  $n$  dos enteros tales que  $4 \leq k < n$ . De acuerdo con el Teorema de Turán, toda arista de orden  $n$  y tamaño  $m \geq t_{n,k-1} + 1$  contiene a  $K_k$  como subgráfica. De manera que toda  $(t_{n,k-1} + 1)$ -arista coloración de  $K_n$  contiene una  $K_k$  arcoíris, en consecuencia:

$$rb_n(K_k) \leq t_{n,k-1} + 1.$$

Esta cota se puede mejorar, de hecho, se conoce el número arcoíris exacto. A continuación enunciamos el teorema que determina dicho número, pero omitimos la prueba.

**Teorema 9.2.19.** Para enteros  $k$  y  $n$  con  $4 \leq k < n$

$$rb_n(K_k) = t_{n,k-2} + 2.$$

En la Figura ??(a), se muestra una 3-coloración arcoíris de la gráfica de Petersen, que denotamos con  $P$ , de manera que  $rc(P) \leq 3$ . Veamos  $rc(P) = 3$ . Como  $diam(P) = 2$ , basta ver que no existe una 2-coloración arcoíris de  $P$ . Supongamos lo contrario y sea  $c$  una 2-coloración arcoíris de  $P$ . Como  $P$  es cúbica, existen dos aristas adyacentes, digamos  $uv$  y  $vw$ , a las cuales se le asigna el mismo color bajo  $c$ . Luego, el cuello de  $P$  es 5, de manera que  $(u, v, w)$  es la única  $(u, w)$ -trayectoria de longitud 2 en  $P$  y  $uw \notin A(P)$ , por lo tanto, no existe una  $(u, w)$ -trayectoria arcoíris en  $P$  con respecto a  $c$ . En conclusión,  $rc(P) = 3$ .

Sea  $c$  una arista coloración de una gráfica conexa y no trivial  $G$ . Para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  de  $G$ , una  $(u, v)$ -geodésica arcoíris en  $G$  es una  $(u, v)$ -trayectoria arcoíris de longitud  $d(u, v)$ . Se dice que una gráfica  $G$  es **arcoíris conexa fuerte** si  $G$  contiene una  $(u, v)$ -geodésica arcoíris para cualesquiera  $u, v \in V(G)$ . En este caso se dice que la coloración es una **coloración arcoíris fuerte**. El mínimo entero positivo  $k$  para el cual  $G$  tiene una coloración arcoíris fuerte es el **número de conexidad arcoíris fuerte**,  $src(G)$ , de  $G$ . De manera que si  $G$  es una gráfica conexa de tamaño  $m$ , entonces:

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m \quad (9.6)$$

Como el número de conexidad arcoíris de  $P$  es 3, de acuerdo con (9.6)  $src(P) \geq 3$ . La 3-coloración arcoíris de  $P$  de la Figura ??(a) no es una

coloración arcoíris fuerte sin embargo la 4-coloración de la misma figura inciso (b), sí es una coloración arcoíris fuerte. Veamos que  $4 = \text{src}(P)$ . Para esto, notemos que cualquier coloración arcoíris fuerte de la gráfica de Petersen no puede asignar el mismo color a aristas adyacentes, lo cual implica que la coloración tiene que ser propia. Como  $\chi'(P) = 4$ ,  $\text{src}(P) \geq 4$ , con lo cual concluimos lo deseado.

**Teorema 9.2.20.** Para  $k \in \{1, 2\}$  y una gráfica  $G$  no trivial,

$$rc(G) = k \text{ si y sólo si } \text{src}(G) = k.$$

*Demostración.* Si  $rc(G) = 1$ , entonces, en virtud de (9.6),  $\text{diam}(G) = 1$  y en consecuencia  $G$  es completa. La coloración que asigna el color 1 a todas las aristas de  $G$  es entonces una 1-coloración arcoíris fuerte de  $G$  y por lo tanto  $\text{src}(G) = 1$ . La otra implicación se obtiene de manera inmediata de la desigualdad antes mencionada.

Si  $rc(G) = 2$ , entonces  $\text{diam}(G) = 2$ , de manera que existe una 2-coloración arcoíris de  $G$  en la cual cualesquiera dos vértices no adyacentes están conectados por una trayectoria arcoíris de longitud 2, la cual es justamente una geodésica. Por lo tanto  $\text{src}(G) = 2$ . De acuerdo con la desigualdad (9.6) y con el caso anterior, si  $\text{src}(G) = 2$  entonces  $rc(G) = 2$  también.  $\square$

Por lo tanto el número de conexidad arcoíris de una gráfica es 1 si y sólo si la gráfica es completa. Además, en el otro extremo tenemos lo siguiente.

**Teorema 9.2.21.** Sea  $G$  una gráfica conexa y no trivial de tamaño  $m$ . Entonces,

$$rc(G) = \text{src}(G) = m \text{ si y sólo si } G \text{ es un árbol.}$$

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  y tamaño  $m$  tal que  $rc(G) = \text{src}(G) = m$  pero que no es un árbol. Consideremos  $T$  un árbol generador de  $G$ . De manera que el tamaño de  $T$  es  $n - 1 < m$ . Así, sea  $c$  la  $(n - 1)$ -arista coloración de  $G$  que colorea cada arista de  $T$  de un color distinto y al resto de las aristas de un mismo color, cualquiera de los  $n - 1$ . ésta es claramente una  $(n - 1)$ -coloración arcoíris de  $G$ , pero  $n - 1 < m = rc(G)$ , lo cual es imposible. Por lo tanto,  $G$  es un árbol.

$\Leftarrow$ ) Sea  $G$  un árbol de tamaño  $m$  y supongamos que existe una  $(m - 1)$ -coloración arcoíris de  $G$ , digamos  $c$ . Esto implica que existen dos aristas  $e = uv$  y  $f = xy$  a las cuales se les asigna el mismo color. Como la gráfica es conexa, para  $u$  o  $v$  y  $x$  o  $y$ , digamos  $u$  y  $x$ , existe una  $(u, x)$ -trayectoria en  $G$  que contiene a  $e$  y a  $f$ . Más aún, ésta es la única  $(u, x)$ -trayectoria en  $G$ , de manera que no existe una  $(u, x)$ -trayectoria arcoíris en  $G$  en contradicción con la hipótesis.  $\diamond$

$\square$

**Algunos números de conexidad arcoíris**

Para la gráfica completa  $K_n$ , con  $n \geq 2$ ,  $diam(K_n) = rc(K_n) = src(K_n) = 1$ ; mientras que para la gráfica de Petersen,  $P$ ,  $src(P) = 4$ ,  $rc(P) = 3$  y  $diam(P) = 2$ . Más aún,  $src(K_{1,t}) = rc(K_{1,t}) = t$  y  $diam(K_{1,t}) = 2$ . De manera que tanto el número de conexidad arcoíris fuerte y el número de conexidad arcoíris pueden ser considerablemente mayores que el diámetro. Otra clase muy conocida de gráficas de diámetro 2 y que contiene a las estrellas son las gráficas bipartitas completas.

**Teorema 9.2.22.** Para enteros  $s, t$  con  $1 \leq s \leq t$ ,

$$src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil.$$

*Demostración.* Como  $src(K_{1,t}) = t$ , la afirmación es válida para  $s = 1$ . Supongamos entonces que  $s \geq 2$ . Sea  $k = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$ . Así,  $1 \leq k - 1 < \sqrt[s]{t} \leq k$ , por lo tanto

$$(k - 1)^s < t \leq k^s \quad (9.7)$$

Primero veamos que  $src(K_{s,t}) \geq k$ . Para esto supongamos lo contrario, es decir, supongamos que

$$src(K_{s,t}) \leq k - 1.$$

Esto implica que existe una  $(k - 1)$ -coloración arcoíris fuerte de  $K_{s,t}$ , digamos  $c$ . Sean  $U$  y  $W$  los conjuntos partición de  $K_{s,t}$ , donde  $|U| = s$  y  $|W| = t$ , con  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ . Para cada  $w \in W$ , definamos el código de color, que denotamos con  $code(w)$ , como la  $s$ -tupla ordenada

$$(a_1, a_2, \dots, a_s),$$

donde  $a_i = c(u_i w)$  para todo  $1 \leq i \leq s$ . Como  $1 \leq a_i \leq k - 1$  para cada  $i \in \{1, \dots, s\}$ , el número de códigos de color de los vértices de  $W$  que son distintos es a lo más  $(k - 1)^s$ . Además, en virtud de (9.7),  $(k - 1)^s < t$ , lo cual implica que existen dos vértices distintos  $w'$  y  $w''$  en  $W$  tales que  $code(w') = code(w'')$ , de manera que  $c(w' u_i) = c(w'' u_i)$  para todo  $i$  ( $1 \leq i \leq s$ ). Por lo tanto, no existe una  $(w', w'')$ -geodésica arcoíris en  $K_{s,t}$ , con respecto a  $c$ , en contradicción con la hipótesis.

Ahora veamos que  $src(K_{s,t}) \leq k$ . Para esto, sean

$$A = \{1, 2, \dots, k\} \text{ y } B = \{1, 2, \dots, k - 1\}.$$

Además, sean  $A^s$  y  $B^s$  el producto cartesiano de  $s$  veces  $A$  y  $s$  veces  $B$ , respectivamente. Entonces,  $|A^s| = k^s$  y  $|B^s| = (k - 1)^s$ . De acuerdo con (9.7), esto implica que

$$|B^s| < t \leq |A^s|.$$

Sea  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$  y consideremos un etiquetamiento de los  $t$  elementos de  $W$  con elementos de  $A^s$ , de tal manera que los vértices  $w_1, w_2, \dots, w_{(k-1)^s}$  están etiquetados con los  $(k-1)^s$  elementos de  $B^s$ . Para cada  $i$  ( $1 \leq i \leq t$ ), denotemos a la etiqueta de  $w_i$  como

$$l(w_i) = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,s}).$$

Por lo tanto, para cada  $i \in \{1, \dots, (k-1)^s\}$  y cada  $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ , se sigue que  $1 \leq a_{i,j} \leq k-1$ .

Definamos entonces una arista coloración  $c$  de  $K_{s,t}$  como:

$$c(w_i u_j) = a_{i,j} \text{ donde } 1 \leq i \leq t \text{ y } 1 \leq j \leq s.$$

Por lo que el código de color de  $w_i$  ( $1 \leq i \leq t$ ) es  $code(w_i) = l(w_i)$  y por lo mismo, vértices en  $W$  distintos tienen códigos de color distintos.

Veamos que  $c$  es una  $k$ -coloración arcoíris fuerte de  $K_{s,t}$ . Para  $w_i \in W$  y  $u_j \in U$ ,  $w_i u_j$  es una  $(w_i, u_j)$ -geodésica arcoíris en  $K_{s,t}$ . Ahora, sean  $w_a$  y  $w_b$  dos vértices de  $W$ . Como  $w_a$  y  $w_b$  tienen códigos de color distintos, existe un entero  $r$ , con  $1 \leq r \leq s$ , tal que la  $r$ -ésima coordenada de  $code(w_a)$  y  $code(w_b)$  son diferentes. Por lo tanto,  $c(w_a u_r) \neq c(w_b u_r)$  y  $(w_a, u_r, w_b)$  es una  $(w_a, w_b)$ -geodésica arcoíris en  $K_{s,t}$ . Luego, sean  $u_p$  y  $u_q$  dos vértices en  $U$ . Como existe un vértice  $w_i \in W$  con  $1 \leq i \leq (k-1)^s$  tal que  $a_{i,p} \neq a_{i,q}$ ,  $(u_p, w_i, u_q)$  es una  $(u_p, u_q)$ -geodésica arcoíris. Por lo tanto,  $c$  es una  $k$ -coloración arcoíris fuerte en  $K_{s,t}$  y en consecuencia  $src(K_{s,t}) \leq k$ . Con lo cual concluimos la prueba.  $\square$

Se tiene también el siguiente resultado sobre  $rc(K_{s,t})$  pero no incluimos la prueba.

**Teorema 9.2.23.** Para enteros  $s$  y  $t$  con  $2 \leq s \leq t$ ,

$$rc(K_{s,t}) = \min \left\{ \left\lceil \sqrt[s]{t} \right\rceil, 4 \right\}.$$

Para los ciclos tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 9.2.7.** Para todo  $n \geq 4$

$$rc(C_n) = src(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

*Demostración.* Sea  $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1)$  un ciclo y para cada  $1 \leq i \leq n$ , sea  $e_i = v_i v_{i+1}$ . Consideremos los dos casos posibles según si el ciclo es par o impar.

$C_n$  **par.** Sea  $n = 2k$  para algún entero positivo  $k \geq 2$ . Entonces  $src(C_n) \geq rc(C_n) \geq diam(C_n)$   
 Como la coloración  $c_0$  de  $C_n$  definida como

$$c_0(e_i) = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ i - k & \text{si } k + 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

es una coloración arcoíris fuerte de  $C_n$ ,  $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k$ , en consecuencia  $rc(C_n) = src(C_n) = k$ .

$C_n$  **impar.** Sea  $n = 2k + 1$  para algún entero  $k \geq 2$ . Primero definamos la siguiente arista coloración  $c_1$  de  $C_n$ .

$$c_1(e_i) = \begin{cases} i & \text{si } 1 \leq i \leq k + 1 \\ i - k - 1 & \text{si } k + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Como  $c_1$  es una  $(k + 1)$ -coloración arcoíris fuerte de  $C_n$ ,  $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k + 1$ .

$rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$ , entonces  $rc(C_n) = k$  o  $rc(C_n) = k + 1$ . Veamos que  $rc(C_n) = k + 1$ . Supongamos lo contrario, es decir, que  $rc(C_n) = k$ . Sea  $c'$  una  $k$ -coloración arcoíris de  $C_n$  y sean  $u$  y  $v$  dos vértices antipodales<sup>7</sup> de  $C_n$ . Entonces, la  $(u, v)$ -geodésica en  $C_n$  es una trayectoria arcoíris y la otra  $(u, v)$ -trayectoria no lo es puesto que tiene longitud  $k + 1$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $c'(v_{k+1}v_{k+2}) = k$ .

Consideremos los vértices  $v_1, v_{k+1}$ , y  $v_{k+2}$ . Como la  $(v_1, v_{k+1})$ -geodésica  $P : (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$  es una trayectoria arcoíris y la  $(v_1, v_{k+2})$ -geodésica  $Q : (v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{k+2})$  es una trayectoria arcoíris, alguna arista en  $P$  está coloreada con el color  $k$ , lo mismo que una arista en  $Q$ . Como la  $(v_2, v_{k+2})$ -geodésica  $(v_2, v_3, \dots, v_{k+2})$  es una trayectoria arcoíris,  $c'(v_1v_2) = k$ . Análogamente, la  $(v_n, v_{k+1})$ -geodésica  $(v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{k+1})$  es una trayectoria arcoíris y así,  $c'(v_nv_1) = k$ . Por lo tanto  $c'(v_1v_2) = c'(v_nv_1) = k$ . Esto implica que no existe una  $(v_2, v_n)$ -trayectoria arcoíris en  $G$ , en contradicción con la hipótesis. En conclusión,  $rc(C_n) = src(C_n) = k + 1$ .  $\diamond$

□

De acuerdo con el Teorema de Menger, para cualesquiera vértices  $u$  y  $v$  distintos, en una gráfica  $k$ -conexa  $G$ , existen  $k$   $(u, v)$ -trayectorias independientes (internamente ajenas). La **conexidad arcoíris**,  $\kappa_r(G)$ , de una

<sup>7</sup>Dos vértices en un ciclo son antipodales si la distancia entre ellos es igual al diámetro de la gráfica.

gráfica  $G$   $k$ -conexa, es el mínimo número de colores necesarios en una arista coloración de  $G$  tal que cualesquiera dos vértices distintos estén conectados por  $k$  trayectorias arcoíris internamente ajenas.

Recordemos que el número cromático por aristas de  $K_n$  es

$$\chi'(K_n) = 2 \lceil n/2 \rceil - 1.$$

**Teorema 9.2.24.** Para todo entero  $n \geq 2$ ,

$$\kappa_r(K_n) = \chi'(K_n).$$

*Demostración.* Como  $\kappa_r(K_2) = 1$ , se tiene el resultado para  $n = 2$ . Asumimos entonces que  $n \geq 3$ . Sea  $\chi'(K_n) = k$  y consideremos una  $k$ -arista coloración propia de  $K_n$ . Sean  $u, v$  dos vértices de  $K_n$  y sean  $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$  los vértices restantes. Para cada  $1 \leq i \leq n-2$ , los colores de  $uv_i$  y  $v_i v$  son diferentes. Por lo tanto, la trayectoria  $(u, v)$  junto las trayectorias  $(u, v_i, v)$ ,  $1 \leq i \leq n-2$ , son  $n-1$   $(u, v)$ -trayectorias arcoíris e internamente ajenas. En consecuencia,  $\kappa_r(K_n) \leq \chi'(K_n)$ .

Ahora veamos que  $\kappa_r(K_n) \geq \chi'(K_n)$  para toda  $n \geq 3$ . Supongamos lo contrario, que  $\kappa_r(K_n) = l < \chi'(K_n)$  para algún entero  $n \geq 3$ . Entonces, existe una  $l$ -arista coloración  $c$  de  $K_n$  tal que cualesquiera dos vértices de  $K_n$  están conectados por  $n-1$  trayectorias arcoíris internamente ajenas. Como  $\chi'(K_n) > l$ , existen dos aristas adyacentes en  $K_n$ , digamos  $xy$  y  $yz$ , a las cuales se les asigna el mismo color. Como  $(x, y, z)$  es una de las  $n-1$   $(x, z)$ -trayectorias arcoíris internamente ajenas, se obtiene una contradicción. En consecuencia,  $\kappa_r(K_n) \geq \chi'(K_n)$  y por lo tanto  $\kappa_r(K_n) = \chi'(K_n)$ .  $\square$

En un principio vimos que el número de conexidad arcoíris de la gráfica de Petersen es 3 y que su número de conexidad arcoíris fuerte es 4. La conexidad de la gráfica de Petersen es 3. Se sabe que  $\kappa_r(P) = 5$ .



# Capítulo 10

## Dominación en gráficas

Se dice que un vértice  $v$  de una gráfica  $G$  *domina* a él y a sus vecinos, es decir,  $v$  domina a todos los vértices de su vecindad cerrada y sólo a esos. Un subconjunto  $S$  de vértices de  $G$  es un *conjunto dominante* si todo vértice de  $G$  está dominado por al menos un vértice de  $S$ . En otras palabras,  $S \subseteq V(G)$  es un conjunto dominante si todo vértice en  $V(G) \setminus S$  es adyacente a al menos un vértice de  $S$ .

El *número de dominación* de  $G$ , en símbolos  $\gamma(G)$ , se define como

$$\gamma(G) = \min\{|S|; S \text{ es un conjunto dominante en } G\}.$$

A un conjunto dominante de cardinalidad  $\gamma(G)$  se le llama *conjunto dominante mínimo* o  $\gamma$ -conjunto.

Es claro que para cualquier gráfica  $G$  de orden  $n$ :

- $\gamma(G) = 1$  si y sólo si  $\Delta(G) = n - 1$  y
- $\gamma(G) = n$  si y sólo si  $G = \overline{K}_n$ .

Dado un entero  $k$ , decidir si  $\gamma(G) < k$  es un problema  $\mathcal{NP}$ -completo.

### 10.1. Conjunto dominante minimal

Un *conjunto dominante minimal* en una gráfica  $G$  es un conjunto dominante que no contiene propiamente algún conjunto dominante. Claramente todo conjunto mínimo es minimal pero no siempre sucede lo contrario.

A continuación enunciamos una caracterización de los conjuntos dominantes minimales atribuida a Ore.

**Teorema 10.1.1.** Un conjunto dominante  $S$  en una gráfica  $G$  es un conjunto dominante minimal de  $G$  si y sólo si todo vértice  $v \in S$  satisface al menos una de las siguientes dos propiedades:

- (i)  $\exists w \in V(G) \setminus S$  tal que  $N(w) \cap S = \{v\}$ .
- (ii)  $v$  no es adyacente a vértice alguno de  $S$ .

*Demostración.* Si cada vértice  $v$  de  $S$  satisface alguna de las propiedades (i) y (ii), entonces  $S \setminus \{v\}$  no es un conjunto dominante, de manera que  $S$  es conjunto dominante minimal.

Por otro lado, sea  $S$  un conjunto dominante minimal en  $G$ . Entonces, para todo  $v \in S$ ,  $S \setminus \{v\}$  no es un conjunto dominante, lo cual implica que existe  $w \in V(G) \setminus (S \setminus \{v\})$  tal que  $N[w] \subseteq V(G) \setminus (S \setminus \{v\})$ . Si  $w = v$ , entonces se tiene (ii). Si  $w \neq v$ , como  $S$  es un conjunto dominante en  $G$  y  $w \notin S$ ,  $w$  es adyacente a al menos un vértice de  $S$ . Sin embargo,  $w$  no es adyacente a algún vértice de  $S \setminus \{v\}$ , por lo tanto  $N(w) \cap S = \{v\}$ , es decir, se satisface (i).  $\square$

El siguiente resultado de Ore muestra una propiedad del conjunto complemento de un conjunto dominante minimal en una gráfica sin vértices aislados.

**Teorema 10.1.2.** Si  $S$  es un conjunto dominante minimal en una gráfica sin vértices aislados, entonces  $V(G) \setminus S$  es un conjunto dominante en  $G$ .

*Demostración.* Sea  $v \in S$ . De acuerdo con el teorema anterior, o existe  $w \in V(G) \setminus S$  tal que  $N(w) \cap S = \{v\}$ , y en consecuencia  $v$  es adyacente a al menos un vértice de  $V(G) \setminus S$ , o  $v$  no es adyacente a ningún vértice de  $S$ , lo cual, al  $G$  no tener vértices aislados, implica que  $\emptyset \neq N(v) \subseteq V(G) \setminus S$ .  $\square$

Como consecuencia de este resultado se tiene, para gráficas sin vértices aislados, una cota superior para el número de dominación en términos del orden de la gráfica.

**Corolario 10.1.1.** Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  sin vértices aislados, entonces  $\gamma(G) \leq n/2$ .

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto dominante minimal. De acuerdo con el teorema anterior,  $V(G) \setminus S$  es un conjunto dominante, de manera que

$$\gamma(G) \leq \min\{|S|, |V(G) \setminus S|\} \leq n/2.$$

Donde el mínimo corre dentro de todos los conjuntos dominantes minimales,  $S$ , de  $G$ .  $\square$

Surge entonces la duda de si la cota anterior es justa o no lo es. Antes de dar respuesta a esta pregunta definamos la corona de una gráfica.

**Definición 10.1.1.** Sea  $H = (V(H), A(H))$ , con  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . La *corona* de  $H$  es la siguiente gráfica

$$\text{cor}(H) = (V(H) \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, A(H) \cup \{v_i u_i \mid 1 \leq i \leq n\}).$$

Donde  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  es un conjunto ajeno a  $V(H)$ .

Observemos que si  $G = \text{cor}(H)$ , con  $G$  de orden  $n$ . Entonces,  $G$  no tiene vértices aislados y  $\gamma(G) = n/2$ . Charles Payan y Nguyen Huy Xuuong probaron que toda componente conexa de una gráfica  $G$  de orden  $n$  sin vértices aislados que tiene  $\gamma(G) = n/2$  es o  $C_4$  o la corona de alguna gráfica.

**Lema 10.1.1.** Sea  $G$  una gráfica y  $C$  un conjunto de estrellas del menor cardinal posible que cubre a todos los vértices de  $G$ , entonces  $|C| = \gamma(G)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $C = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$  es un conjunto mínimo de estrellas que cubren los vértices de  $G$ . Para cada  $1 \leq i \leq p$  sea  $x_i$  un vértice de  $S_i$  con grado máximo en  $S_i$ , entonces  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  es un conjunto dominante en  $G$  y por lo tanto  $|C| \geq \gamma(G)$ .

Luego, sea  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{\gamma(G)}\}$  un  $\gamma$ -conjunto. Para cada  $1 \leq i \leq \gamma$  consideremos la estrella formada por  $z_i$  y todos sus vecinos, a la cual denotamos con  $S'_i$ . Así, al ser  $S$  un conjunto dominante,  $\{S'_1, S'_2, \dots, S'_{\gamma(G)}\}$  es un conjunto de estrellas que cubre a  $G$  y por lo tanto  $|C| \leq \gamma(G)$ .  $\square$

**Teorema 10.1.3.** Sea  $G$  una gráfica de orden par  $n$  y sin vértices aislados.  $\gamma(G) = n/2$  si y sólo si las componentes de  $G$  son ciclos de orden 4 o la corona de alguna gráfica conexa.

*Demostración.* De acuerdo con la observación hecha anteriormente y con el hecho de que  $\gamma(C_4) = 2$ , se tiene la suficiencia para que el número de dominación de una gráfica sea la mitad del orden.

Probemos ahora la necesidad de este hecho. Sea  $G$  tal que  $\gamma(G) = n/2$ . Podemos suponer que  $G$  es conexa. Sea  $C = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$  un conjunto de estrellas que cubren todos los vértices de  $G$  de cardinal mínimo y minimal respecto a la contención. De acuerdo con el Lema 10.1.1,  $p = n/2$ , en consecuencia  $C$  es un apareamiento máximo de  $p = n/2$  aristas.

Para cada  $S_i$  en  $C$ , sea  $S_i = x_i y_i$ . Se tienen entonces dos casos.

$p \geq 3$  Afirmamos que para cada  $i$ ,  $x_i$  o  $y_i$  tienen grado 1. Supongamos lo contrario, y sea  $i$  tal que  $d(x_i) \geq 2$  y  $d(y_i) \geq 2$ . Hay tres casos posibles, que  $x_i, y_i$  tengan un vecino en común en alguna  $S_j$ , que  $x_i$  tenga un vecino en  $S_t$  y  $y_i$  otro vecino en  $S_r$  (para algunos  $r \neq t$ , ambos distintos de  $i$ ), o que tengan vecinos distintos en una misma  $S_j$ . En cualquier

caso es posible encontrar un conjunto dominante en  $G$  con cardinalidad menor a  $n/2$  [Ver Figura ??(a)]. Por lo tanto,  $G$  es la corona de alguna gráfica conexa.

$p \leq 2$  En este caso, es fácil ver que  $G$  resulta ser alguna de las gráficas de la Figura ??(b). Si  $p = 1$ ,  $G = K_2$ , y si  $p = 2$ , como ningún vértice puede tener grado tres (de lo contrario  $\gamma(G) = 1$ ) las únicas opciones posibles son  $C_4$  y  $P_4$ .  $\diamond$

□

Béla Bollobás y Ernest Cockayne probaron que toda gráfica sin vértices aislados contiene un conjunto dominante mínimo en el cual todo vértice satisface la propiedad (i) descrita en el enunciado del Teorema 10.1.1.

**Teorema 10.1.4.** Toda gráfica sin vértices aislados contiene un conjunto dominante mínimo  $S$  tal que para todo  $v \in S$ , existe un vértice  $w$  en  $G \setminus S$  tal que  $N(w) \cap S = \{v\}$ .

*Demostración.* Dentro de todos los conjuntos dominantes mínimos de  $G$ , sea  $S$  uno tal que  $G[S]$  tenga tamaño máximo. Supongamos que, por el contrario,  $S$  contiene un vértice  $v$  tal que no tiene la propiedad deseada. Entonces, de acuerdo con el Teorema 10.1.1,  $v$  es un vértice aislado en  $G[S]$ . Más aún, todo vértice de  $V(G) \setminus S$  que es adyacente a  $v$ , es también adyacente a algún otro vértice de  $S$ . Como  $G$  no contiene vértices aislados,  $v$  es adyacente a un vértice  $w \in V(G) \setminus S$ . En consecuencia,  $S' = (S \setminus \{v\}) \cup \{w\}$  es un conjunto dominante mínimo tal que  $G[S']$  contiene al menos una arista que incide en  $w$  y por lo tanto tiene mayor tamaño que  $G[S]$ , en contradicción con la hipótesis.  $\square$

Resulta también que el número de dominación está acotado por arriba por todos los números de cubiertas e independencia.

**Teorema 10.1.5.** Si  $G$  es una gráfica sin vértices aislados, entonces

$$\gamma(G) \leq \min\{\alpha(G), \beta(G), \alpha'(G), \beta'(G)\}.$$

*Demostración.* Como toda cubierta de una gráfica sin vértices aislados es un conjunto dominante, lo mismo que todo conjunto independiente máximo,  $\gamma(G) \leq \beta(G)$  y  $\gamma(G) \leq \alpha(G)$ .

Sea  $X$  una cubierta por aristas en  $G$  de cardinalidad  $\beta'(G)$ . Entonces, en todo vértice de  $G$  incide al menos una arista de  $X$ . Sea  $S$  un conjunto de vértices obtenido al seleccionar por cada arista de  $X$  un vértice en el

cual incide. De manera que  $S$  es un conjunto dominante y en consecuencia  $\gamma(G) \leq |S| \leq |X| = \beta'(G)$ .

Luego, sea  $M$  un apareamiento máximo en  $G$ . Construimos entonces un conjunto  $S$  de vértices que consiste de un vértice por cada arista de  $M$  del siguiente modo. Sea  $uv \in M$ . Como los vértices  $u$  y  $v$  no pueden ser adyacentes a vértices distintos y no saturados por el apareamiento  $M$  ( $M$ -insaturados), digamos  $x, y$ , respectivamente; de lo contrario  $(x, u, v, y)$  es una trayectoria  $M$ -aumentable en  $G$  en contradicción con el hecho de que el apareamiento es máximo. Si  $u$  es adyacente a un vértice  $M$ -insaturado, se coloca  $u$  a  $S$ , de lo contrario se coloca  $v$ . Esto para cada arista de  $M$ . Por lo tanto,  $S$  es un conjunto dominante de  $G$  y  $\gamma(G) \leq |S| = |M| = \alpha'(G)$ .  $\square$

**Proposición 10.1.1.** Para toda gráfica  $G$  de orden  $n$

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta(G) + 1} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

*Demostración.* Como cada vértice de la gráfica domina a lo más a  $\Delta(G) + 1$  vértices, incluido él mismo,  $\left\lceil \frac{n}{\Delta(G) + 1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ . Además, si  $v$  es un vértice de  $G$  de grado máximo, entonces  $V(G) \setminus N(v)$  es un conjunto dominante de  $G$ , con lo cual se tiene la segunda desigualdad.  $\square$

Se tiene también la siguiente cota.

**Teorema 10.1.6.** Para cualquier gráfica  $G$ , de orden  $n$ ,

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1.$$

*Demostración.* Si  $G$  tiene un vértice aislado, entonces  $\Delta(\overline{G}) = n - 1$ , lo cual implica que  $\gamma(\overline{G}) = 1$ , de manera que  $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$ . Lo mismo sucede si  $\overline{G}$  tiene un vértice aislado.

Por otro lado, si ninguna de las dos ( $G$  ni  $\overline{G}$ ) tiene vértices aislados, en virtud del Corolario 10.1.1,  $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n/2 + n/2 = n < n + 1$ .  $\square$

## 10.2. Conjetura de Vizing

Uno de los problemas más conocidos con respecto a la dominación es el de encontrar el número de dominación del producto cartesiano de dos gráficas. Vadim Vizing conjeturó que éste es siempre al menos tan grande como el producto de los números de dominación de dichas gráficas.

**Conjetura de Vizing.** Para cualesquiera dos gráficas  $G$  y  $H$ ,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G) \cdot \gamma(H).$$

La Conjetura de Vizing es actualmente un problema abierto. Sin embargo se tienen resultados sobre ciertas familias para las cuales la afirmación es verdadera.

Antes de ahondar un poco más en esta conjetura veamos algunas cotas superiores de  $\gamma(G \square H)$ .

**Proposición 10.2.1.** Para cualesquiera dos gráficas  $G$  y  $H$  se tiene que

$$\gamma(G \square H) \leq \min \{ \gamma(G) \cdot |V(H)|, \gamma(H) \cdot |V(G)| \}.$$

*Demostración.* Sea  $D$  un  $\gamma$ -conjunto de  $G$ . Así, el conjunto  $D \times V(H)$  resulta ser un conjunto dominante de  $G \square H$  puesto que para cada  $h \in V(H)$ , el conjunto  $D \times \{h\}$  es un conjunto dominante de la copia  $G_h$ . Por lo tanto  $\gamma(G \square H) \leq \gamma(G) \cdot |V(H)|$ . Análogamente se tiene que  $\gamma(G \square H) \leq \gamma(H) \cdot |V(G)|$ , con lo cual podemos concluir lo deseado.  $\square$

Observemos que la estructura del producto cartesiano  $G \square H$  implica que un vértice  $(u, v)$  sólo puede dominar vértices en la misma copia  $G_v$  o  $H_u$  y sólo puede ser dominado por un vértice que coincida con  $(u, v)$  en al menos una coordenada. Con esto en mente podemos afirmar lo siguiente.

**Proposición 10.2.2.** Para cualesquiera dos gráficas  $G$  y  $H$ , se tiene que

$$\gamma(G \square H) \geq \min \{ |V(G)|, |V(H)| \}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $D$  es un conjunto dominante del producto cartesiano y que  $|D| < |V(G)| \leq |V(H)|$ . Por lo tanto existe  $g \in V(G)$  tal que  $H_g$  no contiene ningún vértice de  $D$ . Así, cada vértice  $(g, h)$  con  $h \in V(H)$  está dominado por un vértice en  $D$  de la forma  $(g_h, h)$ , los cuales son todos distintos puesto que la segunda coordenada lo es. En consecuencia  $|D| \geq |V(H)|$ , en contradicción con la hipótesis inicial.  $\square$

Como habíamos mencionado anteriormente, a pesar de que la Conjetura de Vizing no ha podido ser demostrada, se conocen algunas familias de gráficas para las cuales sí se satisface, pero en qué sentido esto. Se dice que una gráfica  $G$  **satisface la conjetura de Vizing** si se cumple que para toda gráfica  $H$ ,

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G) \cdot \gamma(H).$$

Observemos que si  $G$  es una gráfica que satisface la conjetura de Vizing y  $G'$  es una subgráfica generadora de  $G$  tal que  $\gamma(G') = \gamma(G)$ , entonces,  $G'$  también satisface la Conjetura de Vizing. Para esto, sea  $H$  una gráfica, entonces

$$\gamma(G') \cdot \gamma(H) = \gamma(G) \cdot \gamma(H) \leq \gamma(G \square H) \leq \gamma(G' \square H).$$

Donde la primera desigualdad se obtiene del hecho de que  $G$  satisfaga la Conjetura de Vizing, mientras que la segunda desigualdad se obtiene como consecuencia de que  $G' \square H$  es una subgráfica generadora de  $G \square H$ .

**Teorema 10.2.1.** Si  $G$  es una gráfica que satisface la Conjetura de Vizing y  $x$  es un vértice de  $G$  tal que  $\gamma(G - x) < \gamma(G)$ , entonces  $G - x$  también satisface la Conjetura de Vizing.

*Demostración.* Sean  $G$  y  $x$  una gráfica y un vértice de ésta, respectivamente, que satisfacen las condiciones del teorema. Denotemos con  $G' = G - x$ . Notemos que  $\gamma(G') < \gamma(G)$  implica que  $\gamma(G') = \gamma(G) - 1$ . Esto ya que para todo conjunto dominante  $S'$  de  $G'$ ,  $S = S' \cup \{x\}$  es un conjunto dominante en  $G$ .

De acuerdo con esta igualdad y con el hecho de que  $G$  satisface la Conjetura de Vizing, se tiene que para cualquier gráfica  $H$ ,

$$(\gamma(G') + 1)\gamma(H) = \gamma(G)\gamma(H) \leq \gamma(G \square H).$$

Por lo tanto, se cumple la desigualdad

$$\gamma(G')\gamma(H) \leq \gamma(G \square H) - \gamma(H).$$

Para concluir lo deseado basta entonces con exhibir un conjunto dominante de  $G \square H$  de cardinalidad  $\gamma(G' \square H) + \gamma(H)$ . Para esto, sea  $A$  un conjunto dominante mínimo de  $G' \square H$  y  $B$  un conjunto dominante mínimo de  $H$ . Definamos el conjunto  $S = A \cup \{(x, b) \mid b \in B\}$ . Es claro que  $S$  es un conjunto dominante de  $G \square H$  de la cardinalidad buscada. Por lo tanto,

$$\gamma(G')\gamma(H) \leq \gamma(G \square H) - \gamma(H) \leq (\gamma(G' \square H) + \gamma(H)) - \gamma(H) = \gamma(G' \square H). \quad \diamond$$

□

Algunas de las familias de gráficas que satisfacen la Conjetura de Vizing son los ciclos, árboles, gráficas cordales y gráficas de intervalo.

### 10.3. Conjunto dominante independiente

Recordemos que un conjunto de vértices independiente  $S$  de una gráfica  $G$  es un conjunto independiente maximal si  $S$  no es un subconjunto propio de algún conjunto independiente de  $G$ . Por lo tanto, todo conjunto máximo es maximal. La mínima cardinalidad de un conjunto maximal independiente de vértices de  $G$  se denota como  $i(G)$ .

Como todo conjunto maximal independiente de vértices en una gráfica  $G$  es un conjunto dominante en  $G$ ,  $\gamma(G) \leq i(G)$ . Sin embargo, no todo conjunto dominante es independiente. De hecho, no todo conjunto dominante mínimo es independiente.

**Definición 10.3.1.** Un conjunto  $S$  de vértices en una gráfica  $G$  es un **conjunto dominante independiente** si es tanto un conjunto dominante como independiente.

El **número de dominación independiente**,  $i(G)$ , de una gráfica  $G$  es la menor cardinalidad dentro de todos los conjuntos dominantes independientes de  $G$ .

Veamos que el uso de la misma notación entre el número de dominación independiente y la mínima cardinalidad de un conjunto maximal independiente no es un problema.

**Teorema 10.3.1.** Un conjunto de vértices  $S$  de una gráfica, es un conjunto dominante independiente si y sólo si es un conjunto maximal independiente.

*Demostración.* Anteriormente notamos que todo conjunto de vértices independiente maximal es un conjunto dominante. En el otro sentido, supongamos que  $S$  es un conjunto dominante independiente. Entonces,  $S$  es independiente y todo vértice en  $V(G) \setminus S$  es adyacente a un vértice en  $S$ , esto es,  $S$  es maximal independiente.  $\square$

**Corolario 10.3.1.** Todo conjunto de vértices maximal independiente en una gráfica es un conjunto dominante minimal.

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto de vértices independiente maximal. De acuerdo con el teorema anterior,  $S$  es un conjunto dominante. Como  $S$  es independiente, todo vértice de  $S$  satisface la propiedad (ii) del Teorema 10.1.1. Por lo tanto, en virtud de dicho teorema,  $S$  es un conjunto dominante minimal.  $\square$

**Definición 10.3.2.** El **número de dominación superior** de una gráfica  $G$ , que se denota con  $\Gamma(G)$ , es la máxima cardinalidad de un conjunto dominante minimal de  $G$ .

De acuerdo con lo que hemos visto hasta ahora es claro que para toda gráfica  $G$ ,

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \leq \Gamma(G).$$

## 10.4. Dominación total

Sea  $G = (V, A)$  una gráfica sin vértices aislados. Se dice que un subconjunto de vértices,  $S$  es un **conjunto dominante total** de  $G$ , que se abrevia como *TD*-conjunto, si todo vértice de la gráfica es adyacente a algún vértice de  $S$ . Es decir,  $S \subseteq V$  es un *TD*-conjunto de  $G$  si  $N(S) = V$ . Si ningún subconjunto propio de  $S$  es un *TD*-conjunto, entonces  $S$  es un **conjunto dominante total minimal** de  $G$ . Observemos que, para cualquier gráfica  $G$ , sin vértices aislados,  $V(G)$  es un conjunto total dominante, de manera que toda gráfica contiene al menos un conjunto total dominante. El **número de dominación total** de una gráfica  $G$  sin vértices aislados,  $\gamma_t(G)$ , es la menor cardinalidad de un *TD*-conjunto de  $G$ . A un *TD*-conjunto de  $G$  de cardinalidad  $\gamma_t(G)$  se le llama un  $\gamma_t$ -conjunto. Si  $X, Y$  son dos subconjuntos de vértices en  $G$ , entonces el conjunto  $X$  **domina totalmente** al conjunto  $Y$  en  $G$ , que se denota con  $X \succ_t Y$ , si  $Y \subseteq N(X)$ . En particular, si  $X$  domina totalmente a  $V$ , entonces  $X$  es un *TD*-conjunto en  $G$ .

El **número de dominación total superior**,  $\Gamma_t(G)$ , es la mayor cardinalidad de un *TD*-conjunto minimal en  $G$ .

### 10.4.1. De dominación total en gráficas a transversales en hipergráficas

**Definición 10.4.1.** Una **hipergráfica**  $H = (V, A)$  es un conjunto finito no vacío  $V = V(H)$  de elementos, llamados vértices, junto con un multiconjunto finito  $A = A(H)$  de subconjuntos de  $V$ , llamados hiperaristas o simplemente aristas. El orden y el tamaño de  $H$  son  $n = |V|$  y  $m = |A|$ , respectivamente. Una  **$k$ -arista** en  $H$  es una arista de tamaño  $k$ . Se dice que la hipergráfica  $H$  es  **$k$ -uniforme** si toda arista de  $H$  es una  $k$ -arista. El **rango** de  $H$  es el tamaño de la arista más grande de  $H$ .

De manera que toda gráfica simple es una hipergráfica 2-uniforme. Es decir, es un caso particular de hipergráficas.

El **grado** de un vértice  $v$  de  $H$ , que se denota con  $d_H(v)$  es el número de aristas de  $H$  que contienen a  $v$ . Los grados mínimo y máximo dentro de los vértices de  $H$  se denotan con  $\delta(H)$  y  $\Delta(H)$ , respectivamente. Dos vértices  $x, y$  de  $H$  son **adyacentes** si existe una arista  $e$  de  $H$  tal que  $\{x, y\} \subseteq e$ . La **vecindad** de un vértice  $v$  de  $H$ ,  $N_H(v)$ , es el conjunto de todos los vértices, distintos de  $v$ , que son adyacentes a  $v$ . Se dice que dos vértices,  $x, y$  están **conectados** si existe una sucesión  $x = v_0, v_1, \dots, v_k = y$  de vértices de  $H$  tales que  $v_{i-1}$  es adyacente a  $v_i$ , para todo  $1 \leq i \leq k$ . Una **hipergráfica conexa** es una hipergráfica en la cual cualesquiera dos vértices están conectados. Una

**componente conexa**, o simplemente componente, de una hipergráfica  $H$ , es una sub hipergráfica conexa maximal.

Sea  $H$  una hipergráfica. Una **transversal** de  $H$  es un subconjunto de vértices  $T$  tal que cualquier arista de  $H$  tiene al menos un elemento en común con  $T$ . El **número de transversal**,  $\tau(H)$ , de  $H$  es el menor tamaño de una transversal en  $H$ . Se dice que una arista  $e$  en  $H$  está cubierta por un conjunto  $T$  si  $e \cap T \neq \emptyset$ . En particular, si  $T$  es una transversal en  $H$ , entonces  $T$  cubre toda arista de  $H$ , es por esto que a una transversal también puede llamarse cubierta por vértices.

La dominación total en gráficas se puede trasladar al problema de encontrar transversales en hipergráficas como sigue. Para una gráfica  $G$ , definimos la **hipergráfica de vecindad abierta**,  $ONH(G)$ , o simplemente  $H_G$ , como la hipergráfica que consiste del mismo conjunto de vértices que  $G$ ,  $V(G)$ , y cuyo conjunto de aristas es  $\{N_G(x) \mid x \in V(G)\}$ . Una transversal en  $ONH(G)$  es un conjunto de vértices que interseca toda arista de  $ONH(G)$ , lo cual es equivalente a un  $TD$ -conjunto en  $G$  como veremos a continuación.

**Teorema 10.4.1.** Si  $G$  es una gráfica sin vértices aislados y  $H_G$  es la  $ONH$  de  $G$ , entonces  $\gamma_t(G) = \tau(H_G)$ .

*Demostración.* Como todo  $TD$ -conjunto en  $G$  contiene un vértice de la vecindad abierta de cada vértice en  $G$ , dicho conjunto resulta ser una transversal en  $H_G$ . Por otro lado, toda transversal en  $H_G$  contiene un vértice de la vecindad abierta de cada vértice de  $G$  y por lo tanto es un  $TD$ -conjunto en  $G$ . En consecuencia,  $\gamma_t(G) = \tau(H_G)$ .  $\square$

**Proposición 10.4.1.** La  $ONH$  de una gráfica conexa y bipartita consiste en dos componentes, mientras que la  $ONH$  de una gráfica conexa no bipartita es conexa.

*Demostración.* Tarea.  $\square$

## 10.4.2. Algunas propiedades de $TD$ -conjuntos

Si  $G = (V, A)$  es una gráfica,  $S \subseteq V$  y  $v \in S$ , entonces los conjuntos  $pn(v, S) = \{w \in V \mid N(w) \cap S = \{v\}\}$ ,  $ipn(v, S) = pn(v, S) \cap S$  y  $epn(v, S) = pn(v, S) \setminus S$ , son la **vecindad privada**, **vecindad privada interna** y **vecindad privada externa** de  $v$  con respecto a  $S$ , respectivamente.

La siguiente propiedad de un  $TD$ -conjunto minimal en una gráfica, se debe a Cockayne, Dawes y Hedetniemi.

**Teorema 10.4.2.** Sea  $S$  un  $TD$ -conjunto en una gráfica  $G$ . Entonces,  $S$  es un  $TD$ -conjunto minimal si y sólo si para todo  $v$  en  $S$   $pn(v, S) \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Sea  $S$  un  $TD$ -conjunto minimal en  $G$  y sea  $v \in S$ . Si  $pn(v, S) = \emptyset$ , entonces tanto  $epn(v, S)$  como  $ipn(v, S)$  son vacíos, lo cual implica que todo vértice  $x$  de  $G$  tiene que ser adyacente a algún vértice en  $S \setminus \{v\}$  ya que  $N(x) \cap S \neq \{v\}$ . Por lo tanto  $S \setminus \{v\}$  es un  $TD$ -conjunto en  $G$ , en contradicción con la minimalidad de  $S$ .

Para la segunda implicación, supongamos que para todo vértice  $v \in S$   $pn(v, S) \neq \emptyset$ , entonces para todo  $v \in S$ ,  $epn(v, S) \neq \emptyset$  o  $ipn(v, S) \neq \emptyset$ ; en cualquier caso esto implica que para cualquier  $v \in S$ ,  $S \setminus \{v\}$  no es un  $TD$ -conjunto, en consecuencia,  $S$  es un  $TD$ -conjunto minimal.  $\square$

A continuación enunciamos un resultado sobre  $TD$ -conjuntos minimales que utilizaremos más adelante para probar una cota superior del número de dominación total de una gráfica. Sin embargo, omitimos la prueba.

**Teorema 10.4.3.** Si  $G$  es una gráfica conexa de orden  $n \geq 3$  y  $G \not\cong K_n$ , entonces  $G$  tiene un  $\gamma_t$ -conjunto,  $S$ , tal que todo vértice  $v \in S$  satisface alguna de las siguientes dos propiedades:

- $epn(v, S) \neq \emptyset$
- $v$  es adyacente a un vértice  $v'$  de grado 1 en  $G[S]$  que satisface que  $epn(v', S) \neq \emptyset$ .

Para cada subconjunto de vértices  $S$  de  $G$ , la **frontera abierta** de  $S$  se define como:

$$OB(S) = \{v \in V ; |N(v) \cap S| = 1\}.$$

Es decir,  $OB(S)$  es el conjunto de vértices que están dominados totalmente por sólo un vértice de  $S$ . Hedetniemi, Jacobs, Laskar y Pillone caracterizaron los  $TD$ -conjuntos minimales con su frontera abierta como sigue.

**Teorema 10.4.4.** Un  $TD$ -conjunto  $S$  en una gráfica  $G$  es un  $TD$ -conjunto minimal si y sólo si  $OB(S) \succ_t S$ .

*Demostración.* Sean  $S$  un  $TD$ -conjunto minimal y  $v \in S$ . En virtud del Teorema 10.4.2,  $pn(v, S) \neq \emptyset$ , es decir, existe  $u \in V(G)$  tal que  $N(u) \cap S = \{v\}$  y por lo tanto  $u \in OB(S)$ , por lo tanto,  $OB(S) \succ_t S$ .

Ahora, sea  $S$  un  $TD$ -conjunto y supongamos que  $OB(S)$  domina totalmente a  $S$ . Sea  $v \in S$ ; de acuerdo con la hipótesis, existe  $u \in OB(S)$  que domina a  $v$ . Entonces,  $N(u) \cap S = \{v\}$ , en consecuencia  $pn(v, S) \neq \emptyset$  y, en virtud del Teorema 10.4.2,  $S$  es un conjunto dominante total minimal en  $G$ .  $\square$

### 10.4.3. Algunas cotas de $\gamma_t(G)$

Todo  $TD$ -conjunto en una gráfica es a su vez un conjunto de dominación, de manera que  $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$  para cualquier gráfica  $G$  sin vértices aislados. Más aún, si  $S$  es un  $\gamma$ -conjunto en una gráfica  $G$  sin vértices aislados y consideremos un conjunto  $X$  formado por un vecino por cada vértice en  $S$ , elegido de manera arbitraria, entonces  $|X| \leq |S|$  y el conjunto  $X \cup S$  es un  $TD$ -conjunto en  $G$ . Por lo tanto,  $\gamma_t(G) \leq |X| + |S| \leq 2|S| \leq 2\gamma(G)$ . Con esto tenemos la siguiente relación entre el número de dominación ordinario y el número de dominación total en una gráfica sin vértices aislados.

**Teorema 10.4.5.** Para toda gráfica  $G$  sin vértices aislados,  $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$ .

Esta cota superior es justa ya que,  $\gamma(K_n) = 1$  y  $\gamma_t(K_n) = 2$ , para cualquier  $n \geq 2$ . Más aún, éstas no son las únicas gráficas que alcanzan la cota, por ejemplo, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 10.4.6.** Un árbol  $T$  de orden  $n \geq 3$  satisface  $\gamma_t(T) = 2\gamma(T)$  si y sólo si  $T$  tiene un conjunto de dominación  $S$  que cumple las dos condiciones siguientes:

1. Todo vértice de  $S$  es un vértice adyacente a una hoja de  $T$ .
2. El conjunto  $S$  es un empaquetamiento<sup>1</sup> en  $T$ .

Sin embargo, se mantiene como problema abierto caracterizar de manera general a todas las gráficas  $G$  para las cuales  $\gamma_t(G) = 2\gamma(G)$ .

Sea  $G = (V, A)$  una gráfica, la **2-corona**,  $G \circ P_2$ , de  $G$  es la gráfica de orden  $3|V(G)|$  obtenida al agregar a  $G$  una trayectoria de longitud 2 a cada vértice de  $G$  de tal manera que dichas trayectorias sean ajenas en vértices.

**Teorema 10.4.7.** Si  $G$  es una gráfica conexa de orden  $n \geq 3$ , entonces  $\gamma_t(G) \leq 2n/3$ . Además, la igualdad se da si y sólo si  $G$  es  $C_3$ ,  $C_6$  o  $F \circ P_2$  para alguna gráfica conexa  $F$ .

*Demostración.* Sea  $G = (V, A)$  una gráfica conexa de orden  $n \geq 3$ . Si  $G \cong K_n$ , entonces  $\gamma_t(G) = 2 \leq 2n/3$ . Más aún, si  $\gamma_t(G) = 2n/3$ , entonces  $G = K_3 = C_3$ . Por lo tanto, podemos asumir que  $G \not\cong K_n$ . Sea  $S$  un  $\gamma_t$ -conjunto

<sup>1</sup>Sea  $k \in \mathbb{Z}^+$ , un  **$k$ -empaquetamiento** de una gráfica  $G$  es un conjunto  $P \subseteq V(G)$  tal que para cualesquiera dos vértices distintos la distancia entre ellos es mayor a  $k$ . En particular, un 2-empaquetamiento o simplemente empaquetamiento, es un subconjunto de vértices,  $P$  tal que la intersección de las vecindades cerradas de cualesquiera dos elementos (distintos) de  $P$  es vacía.

que satisface las propiedades dadas en el Teorema 10.4.3. Sean  $A = \{v \in S \mid \text{epn}(v, S) = \emptyset\}$  y  $B = S \setminus A$ . De acuerdo con el Teorema 10.4.3, cada vértice  $v \in A$  es adyacente a al menos un vértice de  $B$  que es adyacente a  $v$  y a ningún otro vértice de  $S$ . Entonces,  $|S| = |A| + |B| \leq 2|B|$ . Sea  $C = \bigcup_{v \in S} \text{epn}(v, S)$ . Entonces,  $C \subseteq V \setminus S$ . Como cada vértice de  $B$  tiene al menos un vecino externo  $S$ -privado,  $|C| \geq |B|$ . Por lo tanto,

$$n - |S| = |V \setminus S| \geq |C| \geq |B| \geq |S|/2, \quad (10.1)$$

implicando que  $\gamma_t(G) = |S| \leq 2n/3$ . Con lo cual se tiene probada la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que  $\gamma_t(G) = 2n/3$  (y  $G \neq K_n$ ). Entonces, en la cadena (10.1) deben de cumplirse todas las igualdades. En particular,  $|A| = |B| = |C|$  y  $V \setminus S = C$ . Se deduce entonces que cada vértice de  $B$  tiene grado 2 en  $G$  y es adyacente a un único vértice de  $A$  y a un único vértice de  $C$ . Por lo tanto,  $G$  contiene una subgráfica generadora que consiste de  $r$  copias ajenas de una trayectoria  $P_3$ , donde  $r = n/3$ .

Por otro lado, si tanto  $A$  como  $C$  contienen un vértice de grado 2 o más en  $G$ , entonces la gráfica conexa  $G$  contiene una subgráfica generadora  $H$  donde  $H = C_6$  o  $H = P_9 \cup (r-3)P_3$ . Si  $H = P_9 \cup (r-3)P_3$ , entonces  $\gamma_t(H) = 5 + 2(r-3) = 2r - 1 < 2n/3$ . Como agregar aristas a una gráfica no hace que el número de dominación total aumente,  $\gamma_t(G) \leq \gamma_t(H) < 2n/3$ , en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto,  $H = C_6$ . Pero entonces  $G$  no puede contener aristas que no estuvieran en  $H$ , de manera que  $G = H = C_6$ .

Por último, si todo vértice de  $A$  tiene grado 1 en  $G$ , entonces, en virtud de la conectividad de  $G$ , la subgráfica  $G[C]$  es conexa y  $G = F \circ P_2$  donde  $F = G[C]$ , mientras que si todo vértice de  $C$  tiene grado 1 en  $G$ , entonces la subgráfica  $G[A]$  es conexa y  $G = F \circ P_2$ , con  $F = G[A]$ . Con lo cual concluimos lo deseado.  $\square$

El siguiente resultado provee una cota inferior trivial del número de dominación total de una gráfica, en términos del grado máximo de la gráfica.

**Teorema 10.4.8.** Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  sin vértices aislados, entonces

$$\gamma_t(G) \geq n/\Delta(G).$$

*Demostración.* Sea  $S$  un  $\gamma_t(G)$ -conjunto. Como cada vértice está totalmente dominado por el conjunto  $S$ , todo vértice pertenece a la vecindad abierta de al menos un vértice de  $S$ . Por lo tanto,  $V(G) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ , lo cual implica que

$$n = \left| \bigcup_{v \in S} N_G(v) \right| \leq \sum_{v \in S} |N_G(v)| \leq |S| \cdot \Delta(G),$$

o, equivalentemente,  $\gamma_t(G) = |S| \geq n/\Delta(G)$ .  $\square$

## 10.5. Dominación Romana

**Definición 10.5.1.** Sea  $G = (V, A)$  una gráfica. Una **función de dominación Romana** en  $G$  es una función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  que satisface que todo vértice  $u \in V$  tal que  $f(u) = 0$  es adyacente a al menos un vértice  $v$  tal que  $f(v) = 2$ .

Para una gráfica  $G = (V, A)$ , sean  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  y  $(V_0, V_1, V_2)$  la partición ordenada de  $V$  inducida por  $f$ , donde  $V_i = \{v \in V \mid f(v) = i\}$  y  $|V_i| = n_i$ , para  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Notemos que existe una correspondencia 1-1 entre las funciones  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  y las particiones ordenadas  $(V_0, v_1, v_2)$  de  $V$ . Por lo tanto podemos escribir  $f = (V_0, V_1, V_2)$ .

**Definición 10.5.2.** Una función  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es una **función de dominación Romana (RDF)** si  $V_2 \succ V_0^2$ . El **peso** de  $f$  es  $f(V) = \sum_{v \in V} f(v) = 2n_2 + n_1$ .

El **número de dominación romana**,  $\gamma_R(G)$ , es el mínimo peso posible dentro de todas las RDF de  $G$ . Se dice que una función  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es una  $\gamma_R$ -función si es una RDF y  $f(V) = \gamma_R(G)$ .

Veamos algunas propiedades de los conjuntos de dominación Romana. Empezando por relacionarla con el número de dominación ordinario.

**Proposición 10.5.1.** Para toda gráfica  $G$ .

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

*Demostración.* Sean  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_R$ -función y  $S$  un  $\gamma$ -conjunto de  $G$ . Entonces,  $V_1 \cup V_2$  es un conjunto de dominación en  $G$  y  $(\emptyset, \emptyset, S)$  una función de dominación romana. En consecuencia  $\gamma(G) \leq |V_1| + |V_2| \leq |V_1| + 2|V_2| = \gamma_R(G)$ . Pero  $\gamma(G) \leq 2|S| = 2\gamma(G)$ .  $\square$

Una vez probado esto surge la pregunta de para qué gráficas se alcanzan las cotas.

**Proposición 10.5.2.** Para toda gráfica  $G$  de orden  $n$ ,  $\gamma(G) = \gamma_R(G)$  si y sólo si  $G = \overline{K_n}$ .

*Demostración.* Es claro que si  $\gamma(\overline{K_n}) = n = \gamma_R(\overline{K_n})$ .

Sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es una  $\gamma_R$ -función. La igualdad  $\gamma(G) = \gamma_R(G)$  implica que se tiene la igualdad en  $\gamma(G) \leq |V_1| + |V_2| \leq |V_1| + 2|V_2| = \gamma_R(G)$ . Por lo tanto,  $|V_2| = 0$ , lo cual implica que  $V_0 = \emptyset$ . Por lo tanto,  $\gamma_R(G) = |V_1| = |V| = n$ . Esto implica que  $\gamma(G) = n$ , lo cual, a su vez, implica que  $G = \overline{K_n}$ .  $\square$

<sup>2</sup>Sean  $G = (V, A)$  una gráfica y  $S, S' \subseteq V$ ,  $S$  domina a  $S'$ , en símbolos  $S \succ S'$ , si  $S' \subseteq N[S]$ .

**Observación 10.5.1.** Si  $f = (V_0, V_1, V_2)$  es una  $\gamma_R$ -función, entonces:

1.  $G[V_1]$  tiene grado máximo 1.
2. No existen aristas en  $G$  que unan un vértice de  $V_1$  con uno de  $V_2$ .
3. Cada vértice de  $V_0$  es adyacente a lo más a dos vértices de  $V_1$ .
4.  $V_2$  es un  $\gamma$ -conjunto de  $G[V_0 \cup V_2]$ .
5. Sea  $H = G[V_0 \cup V_2]$ . Entonces cada vértice  $v \in V_2$  tiene al menos un vértice privado respecto a  $V_0 \cup V_2$ .

Más aún, si  $G$  es una gráfica sin vértices aislados, entonces:

6.  $V_1$  es independiente y  $V_0 \cup V_2$  es una cubierta por vértices.
7.  $V_0 \succ V_1$ .
8. Todo vértice de  $V_0$  es adyacente a lo más a un vértice de  $V_1$ , es decir,  $V_1$  es un empaquetamiento.

**Proposición 10.5.3.** Para toda gráfica  $G$  con grado máximo  $\Delta \geq 1$ ,  $\gamma_R(G) \geq 2n/(\Delta + 1)$ .

*Demostración.* Sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una FDR de  $G$  con peso  $\gamma_R$ . Como cada  $v \in V_0$  es adyacente a un vértice de  $V_2$ , se tiene que

$$|V_0| \leq \Delta|V_2|. \quad (10.2)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\Delta + 1)\gamma_R &= (\Delta + 1)|V_1| + (\Delta + 1)2|V_2| \\ &\geq (\Delta + 1)|V_1| + 2|V_2| + 2|V_0| \quad (\text{En virtud de (10.2)}) \\ &\geq 2|V_1| + 2|V_2| + 2|V_0| \\ &= 2n. \quad \diamond \end{aligned}$$

□

Las estrellas  $K_{1,p}$  son un ejemplo de gráficas que alcanzan la cota dada anteriormente. Por lo tanto, la desigualdad de la proposición anterior es justa.

Veamos algunos valores específicos del número de dominación romana.

**Proposición 10.5.4.** Para las clases de trayectorias  $P_n$  y ciclos  $C_n$  se tiene que

$$\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil.$$

**Proposición 10.5.5.** Sea  $G = K_{m_1, m_2, \dots, m_k}$  la  $k$ -partita completa con  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$ . Entonces:

- (a) Si  $m_1 \geq 3$ , entonces  $\gamma_R(G) = 4$ .
- (b) Si  $m_1 = 2$ , entonces  $\gamma_R(G) = 3$ .
- (c) Si  $m_1 = 1$ , entonces  $\gamma_R(G) = 2$ .

**Proposición 10.5.6.** Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  con  $\Delta(G) = n - 1$ , entonces  $\gamma(G) = 1$  y  $\gamma_R(G) = 2$ .

**Proposición 10.5.7.** Si  $G$  es una gráfica de orden  $n$  sin vértices aislados, entonces  $\gamma_R(G) = n$  si y sólo si  $n$  es par y  $G = (n/2)K_2$ .

*Demostración.* Si  $G = (n/2)K_2$ , entonces cada arista contribuye al menos dos a  $\gamma_R(G)$ , y en consecuencia  $n \leq \gamma_R(G) \leq n$ .

Sea  $G$  una gráfica de orden  $n$  (sin vértices aislados) tal que  $\gamma_R(G) = n$ . Si  $G$  tiene dos aristas incidentes  $uv$  y  $vw$ , entonces  $f = (V_0, V_1, V_2)$ , con  $V_0 = \{u, w\}$ ,  $V_1 = V \setminus \{u, v, w\}$  y  $V_2 = \{v\}$ , es una función de dominación Romana. Por lo tanto,  $\gamma_R(G) \leq |V_1| + 2|V_2| = n - 1$ , en contradicción con la hipótesis. En consecuencia, no existen aristas adyacentes y como  $G$  no tiene vértices aislados, se concluye lo deseado.  $\square$

De acuerdo con la Proposición 10.5.1, para cualquier gráfica  $G$ ,  $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$ . Además, vimos que la cota inferior se alcanza siempre y cuando  $G$  sea discreta (Proposición 10.5.2). Resta ver qué gráficas alcanzan la cota superior.

Se dice que una gráfica  $G$  es **Romana** si  $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$ . La Proposición 10.5.6 nos brinda una familia de gráficas Romanas. La Proposición 10.5.4 nos permite identificar todas las trayectorias y todos los ciclos Romanos, que son justamente aquellos de la forma  $P_{3k}$ ,  $C_{3k}$ ,  $P_{3k+2}$  y  $C_{3k+2}$ . La Proposición 10.5.5 determina qué gráficas  $k$ -partitas completas son Romanas, éstas son las gráficas  $G = K_{m_1, m_2, \dots, m_k}$  (con  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$ ) tales que  $m_1 = 1$  o  $m_1 \geq 3$ , en cuyo caso  $\gamma(G) = 1$  y  $\gamma_R(G) = 2$ , o  $\gamma(G) = 2$  y  $\gamma_R(G) = 4$ , respectivamente.

A continuación mostramos una caracterización de las gráficas Romanas.

**Proposición 10.5.8.** Una gráfica  $G$  es Romana si y sólo si tiene una  $\gamma_R$ -función  $f = (V_0, V_1, V_2)$  con  $V_1 = \emptyset$ .

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica Romana y  $S \subseteq V$  un  $\gamma$ -conjunto de ésta. Consideremos la función  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  tal que  $V_0 = V \setminus S$ ,  $V_1 = \emptyset$  y  $V_2 = S$ . Es claro que, al ser  $S$  un  $\gamma$ -conjunto,  $f$  es una FDR. Además, el peso de  $f$  es  $2|V_2| = 2\gamma(G)$  y como  $G$  es Romana, su peso es justamente  $\gamma_R(G)$ , es decir,  $f$  es una  $\gamma_R$ -función de  $G$  tal que  $V_1 = \emptyset$ .

En el otro sentido, sea  $f = (V_0, V_1, V_2)$  una  $\gamma_R$ -función de  $G$  con  $V_1 = \emptyset$ . Por lo tanto,  $\gamma_R(G) = 2|V_2|$ , y como, de acuerdo con la definición,  $(V_1 \cup V_2) \succ V$ ,  $V_2$  es un conjunto de dominación de  $G$ . Pero en virtud de la Observación 10.5.1 (4.), sabemos que  $V_2$  es un  $\gamma$ -conjunto de  $G[V_0 \cup V_2]$ , es decir,  $|V_2| = \gamma(G)$  y  $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$ .  $\square$

## 10.6. $k$ -Dominación

Sea  $S \subseteq V(G)$  un conjunto de dominación en una gráfica  $G$ . Si penamos al conjunto de dominación de  $G$  como un conjunto que “controla” a los vértices de  $V \setminus S$ , entonces al eliminar una arista, es posible que el conjunto  $S$  deje de cumplir con esta tarea. Si por ejemplo, se desea que esto no suceda, entonces será necesario incrementar el nivel de dominación de cada vértice de manera que, aun si una arista “falla”, el conjunto  $S$  siga “controlando” a todos los vértices.

**Teorema 10.6.1.** Sea  $G$  una gráfica y  $S \subseteq V(G)$  un  $\gamma$ -conjunto en ésta, entonces al menos un vértice en  $V \setminus S$  está dominado por no más de dos vértices en  $S$ .

*Demostración.* Sea  $S$  un  $\gamma$ -conjunto de  $G$  y supongamos que todo vértice de  $V \setminus S$  está dominado por tres o más vértices de  $S$ . Sean  $u \in V \setminus S$  y  $v$  y  $w$  dos vértices de  $S$  que dominan a  $u$ . De acuerdo con la hipótesis inicial, todo vértice de  $V \setminus S$  está dominado por al menos un vértice de  $S \setminus \{v, w\}$ . Por lo tanto, el conjunto  $S' = S \setminus \{v, w\} \cup \{u\}$  es un conjunto de dominación de  $G$ , lo cual es imposible ya que  $|S'| < |S|$ .  $\square$

El teorema anterior prueba que dado cualquier  $\gamma$ -conjunto  $S$ , siempre es posible, al eliminar a lo más dos aristas de  $G$ , que  $S$  deje de ser un conjunto de dominación. Si se requiere que la eliminación de cierto número de aristas no modifique la dominación del conjunto, entonces es necesario un grado de dominación mayor. Sean  $G = (V, A)$  una gráfica y  $S \subseteq V$ .  $S$  es un **conjunto  $k$ -dominante** si para todo vértice en  $V \setminus S$ ,  $|N(v) \cap S| \geq k$ . Se dice que  $S$  es  **$k$ -dominante minimal** si es  $k$ -dominante y ningún subconjunto propio de éste es un  $k$ -conjunto dominante. El **número de  $k$  dominación**,  $\gamma_k(G)$ , y el **número de  $k$  dominación superior**,  $\Gamma_k(G)$ , son la mínima cardinalidad

de un conjunto  $k$ -dominante y la máxima cardinalidad de un conjunto  $k$ -dominante minimal, respectivamente.

De acuerdo con la notación empleada anteriormente, dada una gráfica  $G$  y  $k \geq 1$ , con un  $\gamma_k$ -conjunto nos referiremos a un conjunto  $k$ -dominante en  $G$ , de orden  $\gamma_k(G)$ .

Notemos que si  $k = 1$ , entonces  $\gamma_1(G)$  es simplemente  $\gamma(G)$ . Además, para cualesquiera  $1 \leq i \leq k$ , si  $D$  es un conjunto  $k$ -dominante en  $G$ , es también un conjunto  $i$ -dominante y por lo tanto  $\gamma_i(G) \leq \gamma_k(G)$ .

Como corolario del Teorema 10.6.1 se tiene que cualquier conjunto  $k$ -dominante en una gráfica  $G$  con  $3 \leq \Delta(G) \leq k$ , no puede ser un  $\gamma$ -conjunto de  $G$ . Observemos que si  $3 < k < \Delta(G)$ , entonces  $\gamma_k(G) = |V|$ . Por lo tanto podemos afirmar lo siguiente.

**Corolario 10.6.1.** Si  $G$  es una gráfica con  $\Delta(G) \geq 3$  y  $k \geq 3$ , entonces  $\gamma_k(G) > \gamma(G)$ .

Este corolario también se obtiene como consecuencia de la siguiente cota inferior de  $\gamma_k(G)$ .

**Teorema 10.6.2.** Si  $G$  es una gráfica con  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ , entonces  $\gamma_k(G) \geq \gamma(G) + k - 2$ .

*Demostración.* Consideremos  $S$ , un  $\gamma_k$ -conjunto en  $G$  arbitrario. Sean  $u \in V \setminus S$  y  $v_1, v_2, \dots, v_k$   $k$  vértices distintos en  $S$  que dominan a  $u$ . Notemos que como  $\Delta(G) \geq k \geq 2$ ,  $V \setminus S \neq \emptyset$ , ya que siempre hay un conjunto  $k$ -dominante que no contiene a un vértice de grado  $\Delta$ . Como  $S$  es un conjunto  $k$ -dominante, cada vértice en  $V \setminus S$  está dominado por al menos un vértice en  $D \setminus \{v_2, v_3, \dots, v_k\}$ . Por lo tanto, al  $u$  dominar cada vértice de  $\{v_2, \dots, v_k\}$ ,  $S' = S \setminus \{v_2, \dots, v_k\} \cup \{u\}$  es un conjunto de dominación en  $G$ . En consecuencia,  $\gamma(G) \leq |S'| = \gamma_k(G) - (k - 1) + 1 = \gamma_k(G) - k + 2$ .  $\square$

La siguiente afirmación provee una cota inferior para  $\gamma_k(G)$  en términos del grado máximo de la gráfica.

**Teorema 10.6.3.** Para cualquier gráfica  $G$ ,  $\gamma_k(G) \geq kn / (\Delta(G) + k)$ .

*Demostración.* Sea  $S$  un  $\gamma_k$ -conjunto y denotemos con  $t$  al número de aristas entre  $S$  y  $V \setminus S$ . Como el grado de cada vértice en  $S$  es a lo más  $\Delta$ ,  $t \leq \Delta \gamma_k(G)$ . Pero, cada vértice en  $V \setminus S$  es adyacente a al menos  $k$  vértices en  $S$ , de manera que  $t \geq k(n - \gamma_k(G))$ . Combinando ambas desigualdades se puede concluir lo deseado.  $\square$

El siguiente resultado, que muestra la naturaleza de los conjuntos  $k$ -dominantes minimales, es una generalización del Teorema 10.1.1.

**Proposición 10.6.1.** Un conjunto  $k$ -dominante  $S$  es minimal si y sólo si todo vértice  $v \in S$  satisface al menos una de las siguientes dos propiedades:

- (i)  $|N(v) \cap S| < k$ .
- (ii) Existe un vértice  $u \in V \setminus S$  tal que  $|N(u) \cap S| = k$  y  $v \in N(u)$ .

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto  $k$ -dominante minimal en  $G$ . Supongamos que existe un vértice  $v \in S$  para el cual  $|N(v) \cap S| \geq k$  y que para todo vértice  $u \in V \setminus S$ , o  $|N(u) \cap S| > k$  o  $u \notin N(v)$ . Entonces, consideremos el conjunto  $S' = S \setminus \{v\}$ . Como  $v$  es adyacente a al menos  $k$  vértices en  $S'$ , se sigue que  $S'$  es un conjunto  $k$ -dominante, en contradicción con la minimalidad de  $S$ .

Ahora supongamos que  $S$  es un conjunto  $k$ -dominante que satisface alguna de las dos condiciones. Consideremos el conjunto  $S' = S \setminus \{v\}$  para algún vértice arbitrario  $v \in S$ . Si  $S$  satisface la condición (i), entonces  $|N(v) \cap S'| < k$ , lo cual significa que  $S'$  no es un conjunto  $k$ -dominante. Si la condición (ii) se cumple, entonces existe un vértice  $u \in V \setminus S$  tal que  $|N(u) \cap S| = k$  y  $v \in N(u)$ . Pero en este caso el conjunto  $S'$  no puede  $k$ -dominar a  $u$ , en consecuencia, no sería un conjunto  $k$ -dominante en  $G$ . Por lo tanto, en cualquier caso,  $S'$  no es un conjunto  $k$ -dominante, con lo cual se concluye finalmente que  $S$  es un conjunto  $k$ -dominante minimal.  $\square$

Anteriormente vimos que para cualquier gráfica  $G$ ,  $\gamma(G) \leq \alpha(G)$ . Este resultado inspiró al estudio de una relación similar entre la  $k$ -dominación y una noción semejante de independencia en vértices. Para  $k \geq 2$ , se dice que un conjunto  $S \subseteq V$  es  $k$ -**dependiente** si el grado máximo de la subgráfica inducida por  $S$ ,  $G[S]$ , es menor o igual que  $k - 1$ . Un conjunto  $S \subseteq V$   $k$ -dependiente es un **conjunto  $k$ -dependiente maximal** si para todo  $v \in V \setminus S$ ,  $S \cup \{v\}$  no es un conjunto  $k$ -dependiente.

El **número de  $k$ -dependencia**,  $\alpha_k(G)$  es la mayor cardinalidad de un conjunto  $k$ -dependiente en  $G$ . Notemos que todo conjunto  $k$ -dependiente es a su vez un conjunto  $h$ -dependiente, para todo  $h > k$ .

**Teorema 10.6.4.** Para toda gráfica  $G$ ,  $\gamma_2(G) \leq \alpha_2(G)$ .

*Demostración.* Si  $\Delta(G) \leq 1$ , entonces  $\gamma_2(G) = \alpha_2(G) = n$ . Podemos suponer que  $\Delta(G) \geq 2$ . Dentro de todos los conjuntos 2-dependientes máximos, sea  $S$  uno para el cual  $G[S]$  tiene el menor número de aristas. Afirmamos que  $S$  es también un conjunto 2-dominante.

Supongamos que, por el contrario,  $S$  no es un conjunto 2-dominante, es decir, existe un vértice  $u \in V \setminus S$  que no está 2-dominado por  $S$ . Como  $S \cup \{u\}$  no es un conjunto 2-dependiente, deben de haber dos vértices en  $S$ , digamos  $v$  y  $w$ , donde  $v$  es adyacente tanto a  $u$  como a  $w$ . Pero  $v$  es el único

vértice en  $S$  adyacente a  $u$ , en consecuencia el conjunto  $S' = (S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$  es un conjunto 2-dependiente máximo tal que  $G[S']$  tiene menos aristas que  $G[S]$ , en contradicción con la hipótesis inicial. Por lo tanto,  $S$  debe ser un conjunto 2-dominante y en consecuencia  $\gamma_2(G) \leq \alpha_2(G)$ .  $\square$

Este resultado hizo que se conjeturara un resultado análogo para todo  $k \geq 2$ . Favaron prueba esta conjetura pero como corolario de un resultado más fuerte. Denotemos con  $m[S]$  el tamaño de  $G[S]$  y con  $d_S(u)$ , el grado de  $u$  en  $G[S]$ .

**Teorema 10.6.5.** Para toda gráfica  $G$  y todo entero positivo  $k$ , cualquier conjunto  $k$ -dependiente  $D$  para el cual  $k|D| - m[D]$  es máximo, es un conjunto  $k$ -dominante de  $G$ .

*Demostración.* Sea  $D$  un conjunto  $k$ -dependiente para el cual  $k|D| - m[D]$  es máximo. Asumamos que  $D$  no es un conjunto  $k$ -dominante en  $G$  y sea  $v \in V \setminus D$  un vértice que no está  $k$ -dominado por  $D$ . Sea  $C = N_D(v)$  la vecindad de  $v$  en  $D$ . Notemos que  $0 \leq |C| < k$ . Sea  $B$  el conjunto de vértices  $w \in C$  para los cuales  $d_D(w) = k - 1$  (esto es,  $w$  tiene grado  $k - 1$  en  $G[D]$ ). Finalmente, sea  $A$  un conjunto de vértices maximal independiente en  $G[B]$ .

Notemos que  $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$ . Sea  $D' = D \setminus A \cup \{v\}$ . El conjunto  $D'$  es  $k$ -dependiente. Esto se sigue de lo siguiente:

- (i)  $d_{D'}(v) \leq |C| < k$ ;
- (ii)  $d_{D'}(c) \leq d_D(c) < k$  para todo  $c \in D \setminus C$ ,
- (iii)  $d_{D'}(b) \leq d_D(b) + 1 < k$  para todo  $b \in C \setminus B$ ,
- (iv)  $d_{D'}(a) \leq d_D(a) = k - 1$  para todo  $a \in B \setminus A$ ,

ya que todo vértice en  $B \setminus A$  tiene al menos un vecino en  $A$ , puesto que  $A$  es un conjunto independiente maximal en  $G[B]$ .

En consecuencia,  $|D'| = |D| - |A| + 1$  y  $m[D'] = m[D] - (k - 1)|A| + |C| - |A| = m[D] - k|A| + |C|$ . Por lo tanto,  $k|D'| - m[D'] = k|D| - m[D] + k - |C| > k|D| - m[D]$ , lo cual contradice la elección de  $D$ . En conclusión,  $D$  es un conjunto  $k$ -dominante.  $\square$

**Corolario 10.6.2.** Para toda gráfica  $G$  y todo entero  $k > 0$ ,  $\gamma_k(G) \leq \alpha_k(G)$ .

En 1989, Jacobson y Peters demostraron que determinar los números  $\gamma_k(G)$  y  $\alpha_k(G)$  para gráficas arbitrarias es un problema  $\mathcal{NP}$ -completo, y dieron algoritmos lineales para computar dichos números para árboles y para gráficas de series paralelas. En 1994, Bean, Henning y Swart probaron que para  $\gamma_k$ , el problema sigue siendo  $\mathcal{NP}$ -completo incluso en el caso de gráficas bipartitas y cordales.

# Capítulo 11

## Teoría algebraica de gráficas

### 11.1. Homomorfismos

**Definición 11.1.1.** Un *homomorfismo* de una gráfica  $G$  a una gráfica  $H$  es una función  $\varphi : G \rightarrow H$  tal que si  $uv \in A(G)$ , entonces  $\varphi(u)\varphi(v) \in A(H)$ .

Es decir, un homomorfismo es una función de los vértices de  $G$  a los vértices de  $H$  que preserva aristas.

**Proposición 11.1.1.** Una gráfica  $G$  es  $r$ -coloreable si y sólo si existe un homomorfismo de  $G$  a  $K_r$ .

*Demostración.* Supongamos que  $G$  puede ser coloreada propiamente con  $r$  colores, digamos  $\{1, 2, \dots, r\}$  bajo la coloración  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ . De este modo, si consideramos la función definida como:

$$h(u) = w_{c(u)}$$

donde  $V(K_r) = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ , es claro entonces que  $h$  es un homomorfismo de  $G$  a  $K_r$ . Ya que al ser  $c$  una coloración propia, si  $uv \in A(G)$  entonces  $c(u) \neq c(v)$ , en consecuencia  $h(u) = w_{c(u)} \neq w_{c(v)} = h(v)$ . Por lo tanto  $w_{c(u)}w_{c(v)} = h(u)h(v) \in A(K_r)$ .

En el otro sentido, sean  $h : G \rightarrow K_r$  un homomorfismo,  $V(K_r) = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$  y  $h^{-1}(w_i) = \{u \in V(G) \mid h(u) = w_i\}$  para cada  $w_i$  (ojo: alguno de estos conjuntos puede ser vacío).

Consideremos la  $r$ -coloración  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$  definida como:

$$c(u) = i \quad \text{si } u \in h^{-1}(w_i)$$

para todo  $u \in V(G)$ .

Veamos que ésta es propia. Si existen  $u, v \in V(G)$  tales que  $c(u) = c(v)$ , entonces  $h(u) = h(v) = w_i$  para algún  $1 \leq i \leq r$ . Luego, como  $h$  es un homomorfismo y en  $K_r$  no hay lazos,  $uv \notin A(G)$ .  $\square$

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior se tiene lo siguiente.

**Corolario 11.1.1.** Sea  $G$  una gráfica.  $\chi(G)$  es el mínimo entero  $r$  tal que existe un homomorfismo de  $G$  a  $K_r$ .

**Corolario 11.1.2.** Una coloración de una gráfica  $G$  es un homomorfismo de  $G$  a alguna gráfica completa.

De acuerdo con lo anterior se extiende el concepto de coloración de manera que un homomorfismo de  $G$  a  $H$  también se conoce como una  **$H$ -coloración** de  $G$ . Así, si existe un homomorfismo de  $G$  a  $H$ , se dice que  $G$  es **homomorfa** a  $H$  o que  $G$  es  **$H$ -coloreable**.

De aquí en adelante, para facilitar la notación utilizaremos  $G \rightarrow H$  para indicar que existe un homomorfismo de  $G$  a  $H$ . Denotaremos con  $Hom(G, H)$  al conjunto de homomorfismos de  $G$  a  $H$  y con  $hom(G, H)$  a su cardinal. Así mismo,  $Iny(G, H)$  es el conjunto de todos los monomorfismos de  $G$  a  $H$  y con  $iny(G, H)$  a su cardinal.

Así como  $\chi(G)$  es el menor entero  $r$  tal que  $G \rightarrow K_r$ ,  $\omega(G)$  es el mayor entero  $r$  tal que  $K_r \rightarrow G$ . Donde  $\omega(G)$  denota el número de clan de  $G$ <sup>1</sup>.

**Proposición 11.1.2.** Para cualquier gráfica  $G$ ,  $\omega(G) = r$  si y sólo si  $r$  es el mayor entero tal que  $K_r \rightarrow G$ .

*Demostración.* Si  $G$  tiene un clan de orden  $r$ , digamos  $C$ , entonces cualquier isomorfismo de  $K_r$  a  $C$  induce un homomorfismo de  $K_r$  a  $G$ .

En el otro sentido, si  $K_r \rightarrow G$ , entonces cada vértice de  $K_r$  tiene una única imagen en  $G$ , donde todas estas imágenes deben de ser adyacentes en orden de preservar las adyacencias en  $K_r$ . Dichas imágenes deben, por tanto, formar un clan en  $G$  de orden  $r$ .  $\square$

**Proposición 11.1.3.** Si  $G \rightarrow H$ , entonces  $\chi(G) \leq \chi(H)$  y  $\omega(G) \leq \omega(H)$ .

*Demostración.* La composición de homomorfismos es también un homomorfismo, es decir, si  $\varphi' : G \rightarrow H$  y  $\varphi'' : H \rightarrow K$  son dos homomorfismos, entonces  $\varphi = \varphi'' \circ \varphi'$  es un homomorfismo de  $G$  a  $K$ . Por lo tanto,

- $G \rightarrow H \rightarrow K_{\chi(G)}$  implica que  $G \rightarrow K_{\chi(G)}$  y por lo tanto  $\chi(G) \leq \chi(H)$ .
- $K_{\omega(G)} \rightarrow G \rightarrow H$  implica que  $K_{\omega(G)} \rightarrow H$  y por lo tanto  $\omega(G) \leq \omega(H)$ .

$\diamond$

$\square$

---

<sup>1</sup>Sea  $G$  una gráfica.  $\omega(G) = \max\{|V(C)|; C \text{ es un clan de } G\}$ .

Para las siguientes dos proposiciones denotemos con  $P_{k+1}$  la trayectoria de tamaño  $k$ ,  $P_{k+1} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  y con  $C_k$  al ciclo de orden  $k$ ,  $C_k = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ .

**Proposición 11.1.4.** Sea  $G$  una gráfica. Una función  $f : V(P_{k+1}) \rightarrow V(G)$  es un homomorfismo de  $P_{k+1}$  en  $G$  si y sólo si  $(f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_k))$  es un camino en  $G$ .

En particular, homomorfismos de  $G$  a  $H$  mandan trayectorias en  $G$  a caminos de la misma longitud en  $H$  y por lo tanto no aumentan las distancias. Se tiene entonces el siguiente resultado.

**Corolario 11.1.3.** Si  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  es un homomorfismo, entonces para cualesquiera  $u, v \in V(G)$ ,

$$d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v).$$

*Demostración.* Si  $(u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$  es una  $(u, v)$ -trayectoria en  $G$ , entonces la sucesión  $(f(u) = f(v_0), \dots, f(v_k) = f(v))$  es un  $(f(u), f(v))$ -camino en  $H$  de longitud  $k$ . En consecuencia,  $d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v)$ .  $\square$

**Proposición 11.1.5.** Una función  $\varphi : V(C_k) \rightarrow V(G)$  es un homomorfismo de  $C_k$  a  $G$  si y sólo si  $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_k), \varphi(v_1))$  es un camino cerrado en  $G$ .

**Corolario 11.1.4.**  $C_{2k+1} \rightarrow C_{2\ell+1}$  si y sólo si  $\ell \leq k$ .

*Demostración.* Para esto sólo hace falta notar que un ciclo impar no contiene un camino cerrado impar menor que su tamaño y que tiene un camino cerrado de cualquier longitud impar mayor o igual a su tamaño.  $\square$

**Proposición 11.1.6.** Si  $G \rightarrow H$ , entonces el cuello impar<sup>2</sup> de  $G$  es al menos tan grande como el cuello impar de  $H$ .

*Demostración.* **Tarea**  $\square$

**Definición 11.1.2.** Un homomorfismo suprayectivo se llama **epimorfismo**. Un homomorfismo inyectivo se llama **monomorfismo**. Un **bimorfismo** es un homomorfismo bitectivo. Un **endomorfismo** es un homomorfismo de una gráfica en sí misma. Al endomorfismo identidad de una gráfica  $G$  lo denotaremos con  $id_G$ . Un **automorfismo** de una gráfica es un isomorfismo de ésta en sí misma.

El conjunto de automorfismos de una gráfica forma un grupo bajo composición. Denotemos con  $Aut(G)$  al grupo de automorfismos de  $G$ .

<sup>2</sup>El cuello impar de una gráfica es el tamaño del ciclo impar más pequeño de dicha gráfica.

### 11.1.1. Cocientes

Si  $G$  y  $H$  son dos gráficas y  $\varphi : G \rightarrow H$  un homomorfismo, la partición asociada,  $\theta_\varphi$  consiste en las pre imágenes de  $\varphi$ , i.e., los conjuntos  $\varphi^{-1}(x)$  para cada  $x \in V(H)$ . Si no hay lazos en el vértice  $x$ , entonces el conjunto  $S_x = \varphi^{-1}(x)$  debe ser independiente en  $G$ . También se tiene que si  $xy \notin A(H)$ , entonces  $uv \notin A(G)$  para cualesquiera  $u \in S_x$  y  $v \in S_y$ .

En el caso de gráficas simples es fácil ver que una función  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  es un homomorfismo de  $G$  a  $H$  si y sólo si la partición asociada,  $\theta_\varphi$  satisface las dos condiciones siguientes:

- $\varphi^{-1}(x)$  es un conjunto independiente en  $G$  para todo  $x \in V(H)$ .
- Si  $xy \notin A(H)$ , entonces  $uv \notin A(G)$ , para cualesquiera  $u \in \varphi^{-1}(x)$  y  $v \in \varphi^{-1}(y)$ .

En particular tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 11.1.7.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas.  $G \rightarrow H$  si y sólo si existe una partición de  $V(G)$  en conjuntos  $S_x$ ,  $x \in V(H)$ , tal que se satisfacen las siguientes dos propiedades:

- $S_x$  es un conjunto independiente en  $G$  para todo  $x \in V(H)$ .
- Si  $xy \notin A(H)$ , entonces  $uv \notin A(G)$ , para cualesquiera  $u \in S_x$  y  $v \in S_y$ .

De manera más general se tiene el siguiente resultado.

**Lema 11.1.1.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas. Una función  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  es un homomorfismo si y sólo si la pre imagen  $\varphi^{-1}(I)$  de cualquier conjunto independiente  $I \subseteq V(H)$  es un conjunto independiente en  $G$ .

En la Proposición 11.1.7 se hizo la observación de qué sucede cuando se consideran lazos. Sin embargo, continuaremos trabajando únicamente con gráficas simples.

**Definición 11.1.3.** Sea  $G$  una gráfica y  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  una partición del conjunto de vértices de  $G$  en clases no vacías. El **cociente** de  $G$  respecto a  $\mathcal{P}$ ,  $G/\mathcal{P}$ , es la gráfica cuyos vértices son los elementos de  $\mathcal{P}$  y cuyas aristas son las parejas  $P_i P_j$ ,  $i \neq j$ , tales que  $uv \in A(G)$  para algún  $u \in P_i$  y  $v \in P_j$ .

La **función canónica**  $\pi_{\mathcal{P}} : V(G) \rightarrow V(G/\mathcal{P})$  es la función que asigna a cada  $u \in V(G)$  el único  $P_i$  tal que  $u \in P_i$ .

De acuerdo con la Proposición 11.1.7 se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 11.1.5.** Sean  $G$  una gráfica y  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  una partición del conjunto de vértices de  $G$ . Entonces,  $\pi_{\mathcal{P}}$  es un homomorfismo si y sólo si  $P_i$  es un conjunto independiente para cada  $i$ .

Un homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow H$  induce una función  $\varphi_A : A(G) \rightarrow A(H)$  tal que, para cualesquiera  $uv \in A(G)$

$$\varphi_A(uv) = \varphi(u)\varphi(v).$$

Se define entonces la gráfica  $\varphi(G) = (\varphi(V(G), \varphi_A(A(G)))$ , a la cual le llamaremos **imagen homomorfa** de  $G$  en  $H$  con respecto a  $\varphi$ . Donde  $\varphi(V(G)) = \{\varphi(u) \mid u \in V(G)\}$  y  $\varphi_A(A(G)) = \{\varphi(u)\varphi(v) \mid uv \in A(G)\}$ .

**Proposición 11.1.8.** Para todo homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow H$  existen una partición  $\mathcal{P}$  de  $V(G)$  en conjuntos independientes y un monomorfismo  $\psi : G/\mathcal{P} \rightarrow H$  tal que  $\varphi = \psi \circ \pi_{\mathcal{P}}$ .

*Demostración.* Como  $\varphi(G)$  es una subgráfica de  $H$  y un cociente de  $G$  respecto a la partición  $\theta_{\varphi}$ , podemos considerar el homomorfismo canónico de  $G$  en  $G/\theta_{\varphi} = \varphi(G)$ , e  $i$  el homomorfismo inclusión de  $\varphi(G)$  en  $H$ .  $\square$

De manera que todo homomorfismo  $\varphi$  se puede ver como la composición de un homomorfismo suprayectivo,  $s$ , y un monomorfismo,  $i$ , es decir.

**Corolario 11.1.6.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas y  $\varphi : G \rightarrow H$  un homomorfismo. Existen un epimorfismo,  $s$  y un monomorfismo  $i$  tales que  $\varphi = i \circ s$ .

**Definición 11.1.4.** Se dice que un homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow H$  es:

- **fiel** si  $\varphi(G)$  es una subgráfica inducida de  $H$ .
- **lleno** si  $uv \in A(G)$  si y sólo si  $\varphi(u)\varphi(v) \in A(H)$ .
- **completo** si es tanto fiel como suprayectivo.

Un homomorfismo  $\varphi$  de  $G$  en  $H$  da pie a una relación de equivalencia  $\equiv_{\varphi}$ , definida sobre  $V$  como  $u \equiv_{\varphi} v$  si y sólo si  $\varphi(u) = \varphi(v)$ . Ésta induce a la vez una partición  $\theta_{\varphi}$  del conjunto de vértices de  $G$ ; la cual sirve tanto en el Corolario 11.1.5, como en la Proposición 11.1.8. Podemos entonces referirnos al cociente de  $G$  respecto a  $\varphi$  y abusar de la notación escribiendo  $G/\varphi$  en lugar de  $G/\theta_{\varphi}$ . En el contexto de cocientes también se puede dar una definición más natural de homomorfismo completo como sigue.

**Proposición 11.1.9.** Un homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow H$  es completo si y sólo si  $\psi : G/\varphi \rightarrow H$  (definido en la Proposición 11.1.8) es un isomorfismo.

Se dice que una gráfica  $H$  es **imagen homomorfa** de una gráfica  $G$  si existe un homomorfismo  $\varphi$  de  $G$  tal que  $\varphi(G) = H$ . Dada una gráfica  $G$ , ¿cuántas imágenes homomorfas (no isomorfas) tiene?

La única imagen homomorfa de la gráfica completa  $K_n$  es ella misma. Pero ¿qué sucede con las demás gráficas? Supongamos que  $G$  no es completa, por lo tanto contiene al menos una pareja de vértices (distintos) no adyacentes, digamos  $u$  y  $v$ . Consideremos la gráfica  $G'$  que resulta de identificar estos dos vértices en un nuevo vértice,  $z_u^v$ . Es decir,  $V(G') = V(G) \setminus \{u, v\} \cup \{z_u^v\}$  y

$$A(G') = (A(G) \setminus \{xy \in A(G) \mid x \in \{u, v\}\}) \cup \{z_u^v x \mid x \in N_G(u) \cup N_G(v)\}.$$

De esta manera, la función  $\epsilon : V(G) \rightarrow V(G')$  definida como

$$\epsilon(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in V(G) \setminus \{u, v\} \\ z_u^v & \text{si } x \in \{u, v\} \end{cases}$$

es un homomorfismo de  $G$  a  $G'$ . Mas aún,  $G'$  es una imagen homomorfa de  $G$ . A dicho homomorfismo se le llama **homomorfismo elemental** de  $G$ . A la imagen homomorfa  $\epsilon(G)$  de una gráfica  $G$  obtenida por un homomorfismo elemental  $\epsilon$  se le conoce también como **imagen homomorfa elemental**.

Observemos que una gráfica  $H$  es imagen homomorfa de una gráfica  $G$  si y sólo si  $H$  puede ser obtenida por una sucesión de homomorfismos elementales empezando con  $G$ . Este hecho nos dice que podemos obtener cada imagen homomorfa de  $G$  con una partición apropiada  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  en conjuntos independientes tal que  $V(H) = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  y donde  $P_i P_j \in A(H)$  si y sólo si algún vértice de  $P_i$  es adyacente a un vértice de  $P_j$ .

Con base en esto se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 11.1.10.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas y  $\varphi : G \rightarrow H$  un homomorfismo. Entonces existen  $k \in \mathbb{N}$  y gráficas  $G = G_0, G_1, \dots, G_k$  tales que  $G_{i+1}$  es una imagen homomorfa de  $G_i$  para  $i < k$  y  $G_k \cong G/\varphi$ .

### 11.1.2. Retracciones

Cuando  $\varphi$  es un endomorfismo de una gráfica  $G$ , la imagen de  $G$  bajo  $\varphi$ ,  $\varphi(G)$ , es una subgráfica de  $G$  y la función inclusión de  $\varphi(G)$  a  $G$  resulta ser un homomorfismo. Esta relación entre  $G$  y  $\varphi(G)$  abre camino al concepto de retracción.

**Definición 11.1.5.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas.  $H$  es un **retracto** de  $G$  si existen homomorfismos  $\rho : G \rightarrow H$  y  $\gamma : H \rightarrow G$  tales que  $\rho \circ \gamma = id_H$ . Al homomorfismo  $\rho$  se le llama **retracción** y a  $\gamma$  **co-retracción**.

La composición de dos retracciones (compatibles) es también una retracción y por lo tanto un retracto de un retracto de  $G$  es a su vez un retracto de  $G$ . Una co-retracción es siempre un monomorfismo fiel y  $\gamma(H)$  una subgráfica inducida de  $G$ . Por lo tanto, los retractsos de  $G$  son (isomorfos a) subgráficas inducidas de  $G$ . Suele entonces pensarse los retractsos como subgráficas. Un endomorfismo  $\rho$  de  $G$  en una subgráfica  $R$  de  $G$  es una retracción cuando  $\rho$  restringido a  $R$  es la identidad en  $R$ . En este caso la co-retracción es naturalmente la función inclusión. Si existe una retracción de  $G$  a  $H$  se dice que  $G$  se retrae a  $H$ , y que  $H$  es un **retracto** de  $G$ .

La condición en la definición de retractsos, de que la composición de una retracción con su co-retracción asociada, sea la identidad puede debilitarse, obteniéndose una caracterización más fuerte de los retractsos.

**Lema 11.1.2.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas.  $H$  es un retracto de  $G$  si y sólo si existen homomorfismos  $\rho : G \rightarrow H$  y  $\sigma : H \rightarrow G$  tales que  $\rho \circ \sigma \in \text{Aut}(H)$ .

En particular, si  $H$  es una subgráfica de  $G$ , entonces  $H$  es un retracto de  $G$  si y sólo si existe un homomorfismo  $\rho : G \rightarrow H$  cuya restricción a  $H$  es un automorfismo en  $H$ .

*Demostración. Tarea.* □

### 11.1.3. Cores

Si  $G$  es una gráfica y  $Q$  un clan de  $G$  de orden  $k = \chi(G)$ , entonces cualquier  $k$ -coloración propia de  $G$  induce una retracción de  $G$  en  $Q$ . En otras palabras, si  $\chi(G) = \omega(G)$ , entonces  $K_{\omega(G)}$  es un retracto de  $G$ . Más aún, de acuerdo con la Proposición 11.1.3 y con el hecho de que  $\omega(G) \leq \chi(G)$ , se tiene la implicación en el otro sentido.

Observemos que como existen homomorfismos en ambas direcciones entre una gráfica  $G$  y cualquiera de sus retractsos  $H$ ,  $G$  y  $H$  tienen el mismo número cromático y el mismo número de clan. Entonces, existen subgráficas de  $G$  que no son retractsos de ésta. De hecho, ninguna subgráfica de  $G$  con número cromático menor que  $G$  es un retracto de  $G$ . Por otro lado, una gráfica siempre es un retracto de sí misma y no necesariamente tiene algún otro retracto.

**Definición 11.1.6.** Un **core** es una gráfica que no se retrae a ninguna subgráfica propia.

Veamos que una gráfica es un core si y sólo si todo endomorfismo de  $G$  es un automorfismo de  $G$ .

**Proposición 11.1.11.** Sea  $G$  una gráfica. Entonces  $G$  es un core si y sólo si  $G$  no es homomorfa a ninguna subgráfica propia.

*Demostración.* Probaremos la primera implicación por contrapositiva. Supongamos que  $G$  es homomorfa a una subgráfica propia. Sea  $H$  una subgráfica propia de  $G$  tal que  $G \rightarrow H$  y con el menor número de vértices posible. Entonces,  $H$  no puede ser homomorfa a alguna de sus subgráficas propias, y por lo tanto todo endomorfismo de  $H$  debe ser un automorfismo. Sea  $\varphi$  un homomorfismo de  $G$  a  $H$ . Entonces, la restricción  $\gamma$ , de  $\varphi$  a  $H$  es un automorfismo de  $H$ , en consecuencia, tiene un automorfismo inverso  $\gamma^{-1}$ . Entonces, claramente  $\varphi$  es una retracción de  $G$  a  $H$  y  $\gamma^{-1}$  la co-retracción asociada. Si  $G$  no es core, se retracta a una subgráfica propia, en consecuencia es homomorfa a ésta, con lo cual se tiene probado la segunda implicación.  $\square$

**Corolario 11.1.7.** Sea  $G$  una gráfica. Entonces  $G$  es core si y sólo si todo endomorfismo de  $G$  es un automorfismo en  $G$ .

**Definición 11.1.7.** Un retracto  $H$  de  $G$  es un **core de  $G$**  si es un core.

Dentro de todas las subgráficas de  $G$  que son retractos de ésta, elijamos uno, digamos  $H$ , con el menor número de vértices posibles. Como retractos de retractos de  $G$  son retractos de  $G$ ,  $H$  es un core. En consecuencia *toda gráfica tiene un core*.

**Proposición 11.1.12.** Si  $H_0$  y  $H_1$  son cores de una gráfica  $G$ , entonces son isomorfos.

*Demostración.* Consideremos  $H_0$  y  $H_1$  dos cores de una gráfica  $G$ ,  $\rho_0, \rho_1$  las retracciones de  $G$  a  $H_0$  y  $H_1$ , respectivamente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que tanto  $H_0$  como  $H_1$  son subgráficas de  $G$ . Sea  $\sigma_i : H_i \rightarrow H_{1-i}$  la restricción de  $\rho_{1-i}$  a  $H_i$ ,  $i = 0, 1$ . Entonces,  $\sigma_{1-i} \circ \sigma_i$  es un endomorfismo de  $H_i$ , y como  $H_i$  es un core,  $\sigma_{1-i} \circ \sigma_i \in \text{Aut}(H_i)$  [Corolario 11.1.7]. Esto significa que  $\sigma_0, \sigma_1$  son isomorfismos.  $\square$

Como todos los cores de una gráfica  $G$  son isomorfos, podemos hablar de **el core** de una gráfica  $G$ ; al cual denotaremos como  $G^\bullet$ . Estrictamente hablando,  $G^\bullet$  es un elemento de la clase de cores isomorfas entre sí, y se suele tomar a  $G^\bullet$  como una subgráfica de  $G$  (la cual es necesariamente inducida). Esta manera de pensar los cores es más intuitiva. Por ejemplo, si  $G$  es una gráfica bipartita, entonces  $G^\bullet \cong K_2$  y por lo tanto toda arista de  $G$  es su core.

## 11.2. Equivalencia homomórfica

Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas tales que  $G \rightarrow H$  y  $H \rightarrow G$ , entonces decimos que  $G$  y  $H$  son **homomórficamente equivalentes**, y lo denotaremos con

$G \leftrightarrow H$ . Es fácil verificar que la equivalencia homomórfica es una relación de equivalencia. De acuerdo con lo visto anteriormente, gráficas homomórficamente equivalentes tienen el mismo número cromático.

Por ejemplo, si  $R$  es un retracto de  $G$ , entonces  $G \leftrightarrow R$ . De hecho, la definición de retracto provee el homomorfismo en ambas direcciones, la retracción  $\rho : G \rightarrow R$  y la co-retracción  $\gamma : R \rightarrow G$ . En particular, esto es válido para cores de gráficas. Por lo tanto, dadas dos gráficas  $G$  y  $H$ , se tiene que  $G \leftrightarrow H$  implica que  $G^\bullet \leftrightarrow H^\bullet$ . Se tiene también un resultado más fuerte.

**Proposición 11.2.1.** Sean  $G$  y  $H$  dos gráficas tales que  $G \leftrightarrow H$ . Entonces los cores de  $G$  y  $H$  son isomorfos.

*Demostración.* Consideremos los cores  $G^\bullet$  y  $H^\bullet$  junto con sus retracciones  $\rho_G : G \rightarrow G^\bullet$  y  $\rho_H : H \rightarrow H^\bullet$ , y co-retracciones  $\gamma_G : G^\bullet \rightarrow G$  y  $\gamma_H : H^\bullet \rightarrow H$ , respectivamente. Sean  $\varphi_G : G \rightarrow H$  y  $\varphi_H : H \rightarrow G$  homomorfismos. Entonces la función  $\psi : G^\bullet \rightarrow G^\bullet$  definida como  $\psi = \rho_G \circ \varphi_H \circ \varphi_G \circ \gamma_G$  es un homomorfismo y por lo tanto un automorfismo de  $G^\bullet$ . En consecuencia,  $\rho_G \circ \varphi_H : H \rightarrow G^\bullet$  es una retracción de  $H$  a  $G^\bullet$  (y  $\varphi_G \circ \gamma_G : G^\bullet \rightarrow H$  su co-retracción asociada), por lo tanto  $G^\bullet$  es un core de  $H$ . De acuerdo con la Proposición 11.1.12,  $G^\bullet$  es isomorfa a  $H^\bullet$ .  $\square$

### 11.3. Gráficas transitivas en vértices

Una gráfica  $G$  es **transitiva en vértices** (o simplemente **transitiva**) si para cualesquiera  $u, v \in V(G)$  existe  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  tal que  $\varphi(u) = v$ .

**Afirmación 11.3.1.** Para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$   $K_n$ ,  $C_n$  y  $Q_n$  son transitivas en vértices.

Veamos que todas éstas son un caso particular de una familia de gráficas transitivas en vértices.

Sea  $\Gamma$  un grupo y  $S$  un subconjunto de  $\Gamma$  que es cerrado bajo inversos y que no contiene al elemento neutro de  $\Gamma$ . La **gráfica de Cayley**,  $CG(\Gamma, S)$ , es la gráfica con conjunto de vértices  $\Gamma$  y en la cual dos vértices  $u, v$  son adyacentes si y sólo si  $u^{-1}v \in S$ .

Observemos que si  $u^{-1}v \in S$ , como  $S$  es cerrado bajo inversas,  $v^{-1}u \in S$ . Por lo tanto, la gráfica antes descrita está bien definida.

**Afirmación 11.3.2.** Para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $K_n$ ,  $C_n$  y  $Q_n$  son gráficas de Cayley.

**Teorema 11.3.3.** Sea  $\Gamma$  un grupo. La gráfica de Cayley,  $CG(\Gamma, S)$ , es transitiva en vértices.

*Demostración.* Sean  $\Gamma$  un grupo y  $G = CG(\Gamma, S)$ . Para cada  $z \in \Gamma$  la función  $\rho_z : \Gamma \rightarrow \Gamma$  definida como  $\rho_z(x) = zx$  es una permutación de los elementos de  $G$ , de manera que es una función biyectiva. Más aún,  $\rho_z$  es un automorfismo de  $CG(\Gamma, S)$  ya que

$$(zy)^{-1}(zx) = y^{-1}z^{-1}zx = y^{-1}x$$

y por lo tanto  $\rho_z(y) = zy$  es adyacente a  $\rho_z(x) = zx$  si y sólo si  $y$  y  $x$  son adyacentes. Así, sean  $u, v \in V(G)$ , el automorfismo  $\rho_{vu^{-1}}$  manda  $u$  en  $v$ , con lo cual se concluye lo deseado.  $\square$

Hasta ahora hemos visto que todos nuestros ejemplos de gráficas transitivas en vértices son gráficas de Cayley y que ser de Cayley es suficiente para que la gráfica sea transitiva en vértices, sin embargo no es necesario. Para probar esto último consideremos la gráfica de Petersen. Ésta es una gráfica transitiva en vértices pero no es una gráfica de Cayley.

**Proposición 11.3.1.** La gráfica de Petersen no es gráfica de Cayley.

*Demostración.* Hay únicamente dos grupos de orden 10, el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_{10}$  y el grupo diédrico  $D_5$  (el grupo de todas las simetrías de un pentágono).

**Tarea:** revisar que ninguna de las gráficas de Cayley cúbicas de  $\mathbb{Z}_{10}$  y  $D_5$  es isomorfa a la gráfica de Petersen.  $\square$

A pesar de que no todas las gráficas transitivas en vértices son gráficas de Cayley, la importancia de éstas últimas radica en el siguiente resultado.

Para evitar confusión al tratar con grupos, dados dos vértices  $u$  y  $v$ , con  $u \sim_G v$  denotamos el hecho de que  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $G$ .

**Teorema 11.3.4.** Toda gráfica transitiva en vértices es un retracto de alguna gráfica de Cayley.

*Demostración.* Sean  $G$  una gráfica transitiva en vértices y  $u_0$  un vértice de ésta. Considérese el conjunto  $S = \{\sigma \in \text{Aut}(G) \mid \sigma(u_0) \in N_G(u_0)\}$ .

Notemos que si  $\sigma$  es un elemento de  $S$ , entonces  $u_0 \sim_G \sigma(u_0)$  y como  $\sigma \in \text{Aut}(G)$ ,  $\sigma^{-1}(u_0) \sim_G \sigma^{-1}(\sigma(u_0))$ , es decir,  $\sigma^{-1} \in S$ . Además, al  $G$  ser una gráfica sin lazos, la identidad de  $G$  no está en  $S$ . Por lo tanto,  $S$  es un subconjunto de  $\text{Aut}(G)$  cerrado bajo inversas y que no contiene a la identidad (elemento neutro de  $\text{Aut}(G)$ ). Consideremos entonces la gráfica de Cayley  $CG(\text{Aut}(G), S)$ , a la cual denotaremos simplemente como  $H$ .

De acuerdo con la definición de  $S$ , para cualesquiera  $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Aut}(G)$

$$\varphi_1 \sim_H \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 \in S \Leftrightarrow u_0 \sim_G \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(u_0) \Leftrightarrow \varphi_1(u_0) \sim_G \varphi_2(u_0) \quad (11.1)$$

Con base en la observación anterior podemos probar fácilmente que las funciones  $\rho : H \rightarrow G$  y  $\gamma : G \rightarrow H$ , definidas a continuación, son homomorfismos. Para esto elijamos por cada  $u \in V(G)$  un automorfismo  $\varphi_u \in \text{Aut}(G)$  tal que  $\varphi_u(u_0) = u$  (el cual existe puesto que  $G$  es transitiva en vértices).

- Para cada  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ ,  $\rho(\varphi) = \varphi(u_0)$ .
- Para cada  $u \in V(G)$ ,  $\gamma(u) = \varphi_u$ .

Notemos que para cualesquiera  $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Aut}(G)$ , de acuerdo con (11.1):

$$\varphi_1 \sim_H \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1(u_0) \sim_G \varphi_2(u_0) \Leftrightarrow \rho(\varphi_1) \sim_G \rho(\varphi_2);$$

y para cualesquiera  $u, v \in V(G)$

$$u \sim_G v \Leftrightarrow \varphi_u(u_0) \sim_G \varphi_v(u_0) \Leftrightarrow \varphi_u \sim_H \varphi_v \Leftrightarrow \gamma(u) \sim_H \gamma(v).$$

Por lo tanto  $\rho$  y  $\gamma$  son homomorfismos. Por último notemos que para todo  $v \in V(G)$ ,

$$\rho \circ \gamma(v) = \rho(\varphi_v) = \varphi_v(u_0) = v,$$

es decir,  $\rho \circ \gamma = id_G$ . Con lo cual concluimos que  $G$  es un retracto de  $CG(\text{Aut}(G), S)$ .  $\square$

El Teorema 11.3.4 nos dice que toda gráfica transitiva en vértices es retracto de una gráfica de Cayley. Como los retractos suelen simplificar la estructura de un objeto, valdría la pena investigar también los retractos de las gráficas transitivas en vértices. Sin embargo, las retracciones no suelen preservar la transitividad en vértices; por ejemplo, todo ciclo par se retrae a una trayectoria del mismo diámetro. Con respecto a cores se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 11.3.5.** Sea  $G$  una gráfica vértice transitiva. Entonces su core  $G^\bullet$  es también transitivo en vértices.

*Demostración.* Sea  $\rho : G \rightarrow G^\bullet$  una retracción y  $\gamma : G^\bullet \rightarrow G$  su co-retracción asociada. Para cualesquiera  $u, v \in V(G^\bullet)$  existe un automorfismo  $\varphi$  de  $G$  que manda  $\gamma(u)$  en  $\gamma(v)$ . Tenemos entonces que  $\rho \circ \varphi \circ \gamma(u) = v$  (ya que  $\rho \circ \gamma$  es la función identidad en  $G^\bullet$ ). Pero al  $G^\bullet$  ser un core, la función  $\rho \circ \varphi \circ \gamma : G^\bullet \rightarrow G^\bullet$  es un automorfismo de  $G^\bullet$ . Por lo tanto,  $\text{Aut}(G^\bullet)$  actúa transitivamente en  $G^\bullet$ .  $\square$

## 11.4. Gráficas transitivas en aristas

**Definición 11.4.1.** Una gráfica  $G$  es transitiva en aristas si para cualesquiera  $e_1, e_2 \in A(G)$  existe  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  tal que  $\varphi(e_1) = e_2$ .

Si una gráfica es transitiva en vértices ¿es transitiva en aristas? Para responder esta pregunta pensemos, por ejemplo en las gráficas  $C_3 \square K_2$  y  $CG(\mathbb{Z}_8, \{4, 2, 6\})$ . Qué sucede en el otro sentido? Es decir, si una gráfica es transitiva en aristas ¿es transitiva en vértices? Toda gráfica bipartita completa,  $K_{m,n}$  es transitiva en aristas, sin embargo, si  $n \neq m$ , no es transitiva en vértices.

**Proposición 11.4.1.** Toda gráfica transitiva en aristas, sin vértices aislados y no transitiva en vértices, es bipartita.

*Demostración.* Sea  $G$  una gráfica transitiva en aristas. Supongamos que  $xy$  es una arista en  $G$ . Si  $w \in V(G)$ , entonces  $w$  incide en una arista y existe  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  tal que  $\varphi(w) \in \{x, y\}$ . De manera que para cualquier vértice de  $G$ , existe un automorfismo que manda el vértice en  $x$  o en  $y$ .

Veamos que no existe  $w \in V(G)$  para el cual existan  $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Aut}(G)$  tales que  $\varphi_1(w) = x$  y  $\varphi_2(w) = y$ .

Sean  $z_1, z_2 \in V(G)$  y  $f_1, f_2 \in \text{Aut}(G)$  tales que  $f_1(z_1) = x$  y  $f_2(z_2) = y$ . En consecuencia,  $\varphi^{-1} \circ f_1(z_1) = w$ , es decir,  $\varphi_2(w) = y$  y  $f_2^{-1}(y) = z_2$ , es decir,  $f_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \circ f_1(z_1) = z_2$  y  $f_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \circ f_1 \in \text{Aut}(G)$ .

Es decir, si existe  $w \in V(G)$  para la cual existen automorfismos en  $G$  que la manda a  $x$  y a  $y$ , la gráfica sería transitiva en vértices.

Sean

$$\begin{aligned} V_x &= \{u \in V(G) \mid \text{existe } \varphi \in \text{Aut}(G) \text{ tal que } \varphi(u) = x\} \\ V_y &= \{u \in V(G) \mid \text{existe } \varphi \in \text{Aut}(G) \text{ tal que } \varphi(u) = y\}. \end{aligned}$$

Observemos que una arista que une a dos vértices de una misma órbita ( $V_x$  o  $V_y$ ) puede ser enviada por un automorfismo a una arista que contiene un vértice de la otra órbita, por lo tanto los dos conjuntos anteriormente definidos forman una bipartición de  $V(G)$ .  $\square$

**Proposición 11.4.2.** Una gráfica es arista transitiva si y sólo si su gráfica de líneas es vértice transitiva.

**Proposición 11.4.3.** Sea  $G$  una gráfica transitiva en aristas. Entonces  $G^\bullet$  también es transitiva en aristas.

# Índice alfabético

- $(X, Z)$ -trayectoria, 51
- $(k, \ell)$ -núcleo, 125
- $(k, g)$ -jaula, 138
- $(u, v)$ -camino, 20
- 1-factor, 74
- 1-fractorizable, 74
- $ij$ -trayectorias, 97
- $k$ -arista, 179
- $k$ -arista coloración, 97
- $k$ -arista coloreable, 97
- $k$ -arista conexa, 44
- $k$ -arista fuerte, 111
- $k$ -coloración, 89
- $k$ -conexa, 44
- $k$ -fuertemente conexa, 110
- $k$ -rey, 123
- $k$ -uniforme, 179
- $k$ -ventilador, 52
- $(r, g)$ -gráfica, 137
- árbol, 28
- árbol generador, 31
- índice cromático por aristas, 97
  
- algoritmo de Kruskal, 33
- algoritmo de Prim, 35
- apareamiento, 65
- arcos, 105
- arista subdividida, 85
- aristas interiores, 80
- aristas exteriores, 80
  
- biorientación, 107
- bloque, 41
- bosque, 28
- buena coloración, 89
  
- camino cerrado, 20
- camino dirigido, 108
- camino inverso, 20
- cara, 80
- cara exterior, 80
- cara interior, 80
- centro, 110
- cerradura de una gráfica, 61
- ciclo, 20
- ciclo dirigido, 108
- ciclo Hamiltoniano, 58, 115
- circuito, 57
- circuito dirigido, 108
- circuito Euleriano, 57, 114
- clan, 91
- clase de color, 90
- coloración arcoíris fuerte, 164
- coloración propia, 89
- coloreable, 89
- complemento, 17
- componente conexa, 22, 37
- componente conexa fuerte, 111
- condición de Hall, 67
- conexidad arcoíris, 168
- conexidad por aristas fuerte, 111
- conjunto de corte, 43

- conjunto de separación, 111
- conjunto de separación o
  - separador, 110
- conjunto dominante, 171
- conjunto dominante total, 179
- conjunto estable, 19
- corona, 173
- cota de Moore, 137
- cuasi núcleo, 126
- cubierta, 70
- cubierta por aristas, 69
- cuello, 137
  
- debilmente conexas, 110
- descomposición fuerte, 111
- diámetro, 110
- digráfica, 105
- digráfica completa, 107
- digráfica conexa, 110
- digráfica de componentes fuertes,
  - 111
- digráfica Euleriana, 114
- digráfica Hamiltoniana, 115
- digráfica multipartita completa,
  - 124
- digráfica núcleo imperfecta, 125
- digráfica núcleo imperfecta crítica,
  - 125
- digráfica núcleo perfecta, 125
- digráfica orientada, 107
- digráfica regular, 108
- digráfica simétrica, 107
- digráfica trazable, 109
- digráfica unilateral, 111
- digráficas isomorfas, 107
- distancia dirigida, 110
- ditancia, 22
- diámetro, 22
  
- emparejamiento, 65
- emparejamiento perfecto, 66
  
- emparejamiento saturado, 66
- ex grado, 106
- ex vecindad, 106
- ex vecindad cerrada, 106
- ex vecinos, 106
- excentricidad, 110
- exterior, 80
- extremal, 129
- extremo de una trayectoria, 20
  
- factor, 77
- factorización Hamiltoniana, 77
- flechas, 105
- frontera, 80
- frontera exterior, 80
- fuerza, 106
- fuertemente conexas, 110
  
- gráfica  $k$ -crocática, 90
- gráfica acíclica, 27
- gráfica arcoiris fuerte, 164
- gráfica bipartita, 17
- gráfica completa, 16
- gráfica conexa, 22
- gráfica crítica, 91
- gráfica de Moore, 142
- gráfica de Ramsey, 151
- gráfica de Turán, 130
- gráfica dirigida, 105
- gráfica disconexa, 22
- gráfica discreta, 17
- gráfica Euleriana, 57
- gráfica Hamiltoniana, 58
- gráfica impar, 71
- gráfica no separable, 40
- gráfica par, 71
- gráfica planar, 79
- gráfica planar maximal, 84
- gráfica simple, 13
- gráficas isomorfas, 15
- grado, 14

- grado máximo, 14  
 grado mínimo, 14  
 graficable, 23  
 gráfica plana, 79  
 gráfica ponderada, 32
- Hamiltonianamente factoriazable,  
     77  
 hipergráfica, 179  
 hoja, 14
- in grado, 106  
 in vecindad, 106  
 in vecindad cerrada, 106  
 in vecino, 106  
 independiente, 70  
 interior, 80  
 isomorfismo, 15, 107
- lazo, 13  
 longitud, camino, 20
- multigráfica, 13
- núcleo, 125  
 número anti Ramsey, 162  
 número arcoíris, 162  
 número cromático, 90  
 número de clan, 91  
 número de conexidad, 43  
 número de conexidad fuerte, 111  
 número de conexidad por aristas,  
     44  
 número de cubierta por aristas, 69  
 número de cubierta por vértices,  
     70  
 número de dominación total, 179  
 número de dominación, 171  
 número de dominación superior,  
     178  
 número de independencia, 69, 70  
 número de Ramsey, 145, 154
- número de Ramsey arcoíris, 158
- orden, 13  
 orden acíclico, 109  
 orientación de una digráfica, 107
- pancíclica, 116  
 paseo, 20, 57  
 paseo dirigido, 108  
 paseo Euleriano, 57, 114  
 peso de una arista, 32  
 pozo, 106  
 puente, 28
- radio, 110  
 rango, 179  
 reversa de una digráfica, 106  
 rey, 122
- separar, 43  
 sistema de representantes  
     distintos, 68
- sociograma, 12  
 subdigráfica, 107  
 subdigráfica generadora, 107  
 subdivisión, 85  
 subgráfica, 17  
 subgráfica generadora, 18  
 subgráfica inducida, 18  
 subgráfica propia, 18  
 sucesión de grados, 120
- tamaño, 13  
 torneo, 107  
 torneo transitivo, 119  
 trayectoria, 20  
 trayectoria aumentable, 66  
 trayectoria dirigida, 108  
 trayectoria Hamiltoniana, 58  
 trayectoria maximal, 30
- vértice aislado, 14  
 vértice alcanzable, 110

vértice central, 110  
vértice de corte, 37  
vértice dominado, 105  
vértices exteriores, 80  
vértices independientes, 20

vértices interiores, 80  
vecindad de un conjunto, 67  
vecindad, 14  
árbol óptimo, 33