



UNIDAD CUAJIMALPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES E INGENIERÍA

Notas de Curso: Optimización

**Elsa Báez Juárez
Alma R. Méndez Rodríguez**

Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas

División de Ciencias Naturales e Ingeniería
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Cuajimapa

Contents

1 Conjuntos Convexos	7
2 Optimización de funciones sin restricciones	13
2.1 Funciones de una variable	13
2.1.1 Condiciones de primer y segundo orden	13
2.2 Funciones de varias variables	16
2.2.1 Gradiente y Hessiano de una función de varias variables	16
2.2.2 Matrices positivas definidas	16
2.2.3 Condiciones de primer y segundo orden	17
3 Métodos de Búsqueda Unidimensional	25
3.1 Método de bisección	26
3.2 Método de la Sección Áurea	29
3.3 Método de Newton	36
3.4 Método de la Secante	39
4 Optimización no restringida de varias variables	43
4.1 Método del gradiente	44
4.2 Métodos de descenso conjugado	53
4.2.1 Formas cuadráticas	53
4.2.2 Método de descenso conjugado (formas cuadráticas)	54
4.2.3 Método del gradiente conjugado (formas cuadráticas)	58
4.2.4 Método del gradiente conjugado (funciones generales)	61
4.3 Método de Newton	66
4.4 Métodos Quasi-Newton	68
4.4.1 Algoritmo de Davidon-Fletcher-Powell (DFP)	70
5 Método Gráfico	73
6 Optimización con restricciones de igualdad y desigualdad	83
6.1 Optimización con restricciones de igualdad	83
6.1.1 Condiciones de primer orden	85
6.1.2 Condiciones de segundo orden	89
6.2 Optimización con restricciones de desigualdad	96
6.3 Optimización con restricciones mezcladas	104

Chapter 1

Conjuntos Convexos

La importancia de estudiar los conjuntos convexos radica en que las funciones convexas aparecen en una gran variedad de problemas de optimización aplicados a la economía, las finanzas, la industria, etc. Probar que una función es convexa implica el cálculo del Hessiano y la verificación de que el mismo es positivo definido, esta tarea resulta muy tediosa en la mayoría de las veces. Veremos que algunas consideraciones sobre convexidad nos ayudarán a evadir este trabajo. Además, la convexidad es la base matemática de muchos procesos de optimización.

Un conjunto C en \mathbb{R}^n es convexo si para cada \vec{x} y \vec{y} en C , el segmento de línea que une \vec{x} con \vec{y} también pertenece a C . Intuitivamente podemos entenderlo observando la figura 1.1

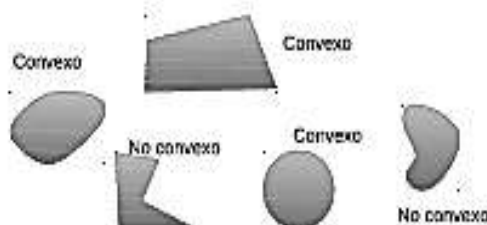


Figure 1.1: Ejemplos de conjuntos convexos y no convexos.

Por definición los siguientes conjuntos son convexos:

- El conjunto vacío $\{\}$.
- Los conjuntos con un único punto \vec{x} .
- También \mathbb{R}^n es un conjunto convexo.

Otros ejemplos de conjuntos convexos:

- Los intervalos abierto y cerrado $(0, 1)$ y $[0, 1]$ son ambos subconjuntos convexos de \mathbb{R} .
- El disco unitario $D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| \leq 1\}$ también es un conjunto convexo de \mathbb{R}^2 .
- El círculo unitario $\mathcal{C} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| = 1\}$ no es un conjunto convexo de \mathbb{R}^2 .

Recordemos que la recta que pasa por los puntos \vec{x} y \vec{y} , donde $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ puede describirse como el conjunto

$$C = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^n : \vec{w} = \lambda \vec{y} + (1 - \lambda) \vec{x}; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

