

# Plan de trabajo para el año sabático (febrero 2024 - enero 2025)

Olivier Charles Albert Sarbach  
Instituto de Física y Matemáticas  
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

A continuación quisiera exponer los temas de investigación que pienso desarrollar durante mi estancia sabática en el Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas de la División de Ciencias Naturales e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, Cuajimalpa. La mayoría de estos temas se estudiarán en colaboración con la Dra. Ana Laura García Perciante, la Dra. Alma Méndez Rodríguez y el Dr. Guillermo Chacón-Acosta, todos investigadores activos adscritos al Departamento de Matemáticas Aplicadas de esta institución y expertos en la teoría cinética de los gases.

## **1. Teoría cinética relativista de los gases: aproximación de Chapman-Enskog**

Un tema central de mi investigación durante los últimos años ha sido el estudio de la teoría cinética relativista de los gases (ver por ejemplo [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] y [8] para un trabajo de revisión que redacté con dos de mis estudiantes). Esta teoría permite describir la evolución de un gas diluido fuera de equilibrio térmico en la presencia de un campo gravitatorio fuerte. Tal situación se encuentra, por ejemplo, en la vecindad de un agujero negro súpermasivo, donde un entendimiento más profundo sobre los procesos de acreción del gas y el mecanismo de lanzamiento del jet requiere un estudio más general que la descripción tradicional del gas a través de un magneto-fluido [9].

En este proyecto estudiaremos las propiedades de un gas cinético relativista que se encuentra cerca de equilibrio (regimen hidrodinámico). En este

caso, es posible escribir la función de distribución que caracteriza el estado del gas por una función de distribución de equilibrio (parametrizada por una cuadri-velocidad, densidad y temperatura) más una pequeña perturbación que obedece una ecuación integral que proviene de la ecuación de Boltzmann linealizada. El método de Chapman-Enskog permite calcular las desviaciones correspondientes en las variables de estado (densidad, temperatura, velocidad) y obtener las expresiones para el flujo de calor y el tensor viscoso como función del gradiente de estas variables. Para trabajo reciente sobre este método que hace uso de la aproximación de Marle, ver por ejemplo [10]. En un primer paso, generalizaremos estos resultados para el caso de un gas relativista en un espacio-tiempo curvo sin usar la aproximación de Marle u otras aproximaciones para el término de colisión; obteniendo expresiones explícitas para los coeficientes de transporte. Además, analizaremos la hiperbolicidad de las ecuaciones de evolución (es decir, estudiaremos si dichas ecuaciones poseen un problema de Cauchy bien planteado [11, 12]) y su causalidad (es decir, verificaremos que las velocidades de propagación sean menores que la velocidad de la luz).

En un segundo paso generalizaremos el estudio previo para un gas cinético que consiste de partículas cargadas. En particular, derivaremos expresiones explícitas para los coeficientes de transporte de calor, de viscosidad y de conductividad eléctrica. Estos resultados deberían ser de gran interés en vista de las observaciones recientes obtenidos por el “Event Horizon Telescope” [13], dado que las simulaciones actuales se basan en la descripción hidrodinámica del gas. Cabe mencionar que este proyecto también contará con la participación del Dr. Carlos Gabarrete de la Universidad Autónoma Nacional de Honduras.

## 2. Teoría cinética relativista de los gases: límite de Vlasov y mixing

Por otro lado, si las colisiones entre partículas son escasas, es posible despreciar el término de colisión en la ecuación de Boltzmann. La ecuación de Vlasov que resulta de esta aproximación puede ser resuelta de forma analítica, siempre y cuando el flujo geodésico sobre el espacio-tiempo está descrito por un sistema hamiltoniano integrable [1]. Un ejemplo de suma relevancia en la astrofísica es el espacio-tiempo de Kerr que describe el campo gravitatorio

generado por un agujero negro estacionario aislado. En este caso, se ha demostrado que el flujo hamiltoniano no solamente es integrable, sino también posee la propiedad de mezcla (“mixing”), que implica que después de una escala de tiempo suficientemente grande, el gas se relaja y puede ser descrito por una función de distribución que depende únicamente de las constantes de movimientos [14].

El objetivo principal de este proyecto es adquirir un entendimiento más completo sobre el efecto mezcla de un gas cinético cuyas partículas se mueven en órbitas acotadas alrededor de un agujero negro de Kerr con rotación. En particular, intentaremos iluminar los siguientes puntos:

- (i) los efectos de las colisiones entre las partículas de gas,
- (ii) los efectos de la auto-gravedad,
- (iii) los efectos del campo electro-magnético sobre las propiedades del gas.

Para estudiar estas cuestiones, se usarán tanto técnicas perturbativas como métodos numéricos basados en un código de “particle-in-cell” para resolver las ecuaciones de Einstein-Vlasov o Maxwell-Vlasov. Este proyecto también contará con la participación de los Drs. Erik Jiménez, Paola Rioseco y Håkan Andréasson.

### 3. Procesos de acreción hacia agujeros negros

El modelo cinético ha sido aplicado con éxito para describir la acreción de materia hacia un agujero negro. En el límite sin colisiones y para el caso de acreción esférica es posible dar un tratamiento analítico que permite calcular de forma explícita las cantidades relevantes como son la densidad de masa y de energía, la presión y la tasa de acreción, ver por ejemplo [3, 15] y también [16, 17] para generalizaciones y aplicaciones interesantes. En este proyecto trataremos de incluir los efectos de las colisiones entre las partículas para ver si de esta manera se recuperan los resultados del modelo de Bondi-Michel en el límite hidrodinámico.

Otro problema que desarrollaré en colaboración con Patryk Mach de la Jagiellonian University en Cracovia, Polonia, es la generalización de los modelos de acreción de un gas sin colisiones para un agujero negro de Kerr con rotación, y de esta manera comparar con el resultado correspondiente del modelo hidrodinámico [18].

Por otro lado, seguiré trabajando en los proyectos en curso con el Dr. Emilio Tejeda, donde tratamos de entender la generalización del modelo de Bondi-Michel para el caso auto-gravitante. Este estudio está basado en la descripción puramente hidrodinámica del gas.

## 4. Estrellas de bosones

Finalmente, seguiré trabajando en la descripción de las estrellas de bosones que está basada en la teoría semi-clásica de la gravedad [19] y en las propiedades de las “ $\ell$ -boson stars” [20, 21], cuya existencia ha revelado una estructura muy rica del espacio de soluciones estacionarias de las ecuaciones de Schrödinger-Poisson o de Einstein-Klein-Gordon. Este proyecto está estrechamente vinculado con el proyecto de tesis de mi estudiante Emmanuel Chávez Nambo y con los temas de investigación en curso que tengo con colaboradores de la UNAM, de la Universidad de Guanajuato y de la Universidad Nacional de Córdoba.

## 5. Resultados entregables

Los resultados entregables esperados son los siguientes:

1. **Publicación de 5 o más artículos de investigación en revistas científicas con arbitraje:**

Se esperan por lo menos dos artículos sobre el uso de la aproximación de Chapman-Enskog en espacio-tiempos curvos, uno para el gas neutro y otros para el gas cargado. Además, se esperan 1-2 artículos sobre el efecto *mixing* en el espacio-tiempo de Kerr, tomando en cuenta correcciones que provienen de la auto-gravedad, de las colisiones y del campo electromagnético. También se esperan 1-2 artículos sobre la acreción de materia en un agujero negro y 1-2 artículos sobre la estabilidad y otras propiedades de las estrellas de bosones en la teoría semi-clásica de la gravedad.

2. **Presentación de mis trabajos en congresos internacionales, talleres y seminarios:**

Espero presentar mis resultados en varios seminarios en la Universidad Autónoma Metropolitana y otras universidades nacionales e interna-

cionales. Además, contemplo asistir y participar en por lo menos una conferencia internacional sobre gravedad y en un evento de la División de Gravitación y Física Matemática de la Sociedad Mexicana de Física. También espero poder impartir 1-2 pláticas de divulgación.

### 3. Formación de recursos humanos:

Como se mencionó anteriormente, varios de mis proyectos están vinculados con los proyectos de tesis de doctorado de mis estudiantes Rubén Acuña Cárdenas y Emmanuel Chávez Nambo. Durante mi año sabático continuaré asesorando a mi estudiante Emmanuel. Rubén se graduará al inicio del año próximo y espero poder continuar mi colaboración con él después de que se gradúe. Además, se contempla la impartición de un curso sobre la teoría cinética de los gases o sobre la teoría general de la relatividad dirigido a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Sistemas.

## Referencias

- [1] O. Sarbach and T. Zannias. The geometry of the tangent bundle and the relativistic kinetic theory of gases. *Class. Quantum Grav.*, 31:085013, 2014.
- [2] F. Astorga, O. Sarbach, and T. Zannias. The evolution of a spatially homogeneous and isotropic universe filled with a collisionless gas. *J. Phys. Conf. Ser.*, 545(1):012001, 2014.
- [3] P. Rioseco and O. Sarbach. Accretion of a relativistic, collisionless kinetic gas into a Schwarzschild black hole. *Class. Quantum Grav.*, 34(9):095007, 2017.
- [4] P. Rioseco and O. Sarbach. Phase space mixing in the equatorial plane of a Kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 98(12):124024, 2018.
- [5] P. Rioseco and O. Sarbach. Phase space mixing in external gravitational central potentials. *Class. Quantum Grav.*, 37(19):195027, 2020.
- [6] C. Gabarrete and O. Sarbach. Axisymmetric, stationary collisionless gas clouds trapped in a Newtonian potential. *Class. Quantum Gravity*, 40(5):055013, 2023.

- [7] C. Gabarrete and O. Sarbach. Axisymmetric, stationary collisionless gas configurations surrounding Schwarzschild black holes. *Class. Quant. Grav.*, 40(5):055012, 2023.
- [8] R. Acuña-Cárdenas, C. Gabarrete, and O. Sarbach. An introduction to the relativistic kinetic theory on curved spacetimes. *General Relativity and Gravitation*, 54(23), February 2022.
- [9] A. Galishnikova, A. Philippov, E. Quataert, F. Bacchini, K. Parfrey, and B. Ripperda. Collisionless Accretion onto Black Holes: Dynamics and Flares. *Phys. Rev. Lett.*, 130(11):115201, 2023.
- [10] A.L. García-Perciante and A.R. Méndez. Dissipative properties of relativistic fluids in a general curved space-time. *General Relativity and Gravitation*, 55(91), aug 2023.
- [11] A. L. García-Perciante and O. Reula. On the illposedness and stability of the relativistic heat equation. *J. Math. Phys.*, 61(5):051506, 2020.
- [12] O. Sarbach and M. Tiglio. Continuum and Discrete Initial-Boundary-Value Problems and Einstein’s Field Equations. *Living Rev. Rel.*, 15:9, 2012.
- [13] Event Horizon Telescope Collaboration. <http://www.eventhorizontelescope.org>.
- [14] P. Rioseco and O. Sarbach. Phase space mixing of a Vlasov gas in the exterior of a Kerr black hole. *e-Print: arXiv:2302.12849*.
- [15] A. Gamboa, C. Gabarrete, P. Domínguez-Fernández, D. Núñez, and O. Sarbach. Accretion of a Vlasov gas onto a black hole from a sphere of finite radius and the role of angular momentum. *Phys. Rev. D*, 104:083001, 2021.
- [16] P. Mach and A. Odrzywołek. Accretion of dark matter onto a moving Schwarzschild black hole: An exact solution. *Phys. Rev. Lett.*, 126:101104, 2021.
- [17] Stuart L. Shapiro. Spikes and accretion of unbound, collisionless matter around black holes. *Phys. Rev. D*, 108(8):083037, 2023.

- [18] Alejandro Aguayo-Ortiz, Emilio Tejeda, Olivier Sarbach, and Diego López-Cámara. Spherical accretion: Bondi, Michel, and rotating black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 504(4):5039–5053, 04 2021.
- [19] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, D. Núñez, and O. Sarbach. Boson stars and their relatives in semiclassical gravity. *Phys. Rev. D*, 107(4):045017, 2023.
- [20] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, D. Núñez, and O. Sarbach.  $\ell$ -Boson stars. *Class. Quant. Grav.*, 35(19):19LT01, 2018.
- [21] A.A. Roque, E. Chávez Nambo, and O. Sarbach. Radial linear stability of nonrelativistic  $\ell$ -boson stars. *Phys. Rev. D*, 107(8):084001, 2023.