Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Cuajimalpa

Modelos Cinéticos para Medir la Desigualdad

Proyectos Terminales I, II, III

Que presenta:
Luis Gabriel Gutiérrez Cruz
Expediente UAM: 2153028536

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
División de Ciencias Naturales e Ingeniería

Asesor y Responsable de Proyecto:
Dr. Guillermo Chacón Acosta

Fecha de inicio: Septiembre 2021
Fecha de terminación: Septiembre 2022
México, CDMX

Índice general

Resumen

La economía rige muchos de los aspectos de nuestra vida cotidiana, por lo que nos vemos en la necesidad de comprenderla de la mejor manera posible, así como encontrar una forma matemática de medir los aspectos en los que tiene influencia. Uno de los más estudiados es la desigualdad social que presentan los países, es de nuestro interés medir este aspecto en una sociedad, comprender como se mide y hacer un desarrollo a detalle de las implicaciones que tiene. En este trabajo se pretende hacer un análisis de los modelos que se han estudiado a lo largo de los años y que describen la dinámica que siguen ciertos sectores de la población, para comprender como ciertos factores influyen en la distribución de la riqueza así como la distribución de probabilidad que se sigue en algunas clases sociales y que es bien sabido es usada para medir aspectos de la población a estudiar.

Capítulo 1

Introducción

En las sociedades modernas existe una gran diferencia entre las clases sociales que se dan, principalmente entre las clases altas y bajas de los países, existen numerosos estudios acerca de las dinámicas que se llegan a dar en estos sectores, en particular en como de distribuye la riqueza. Uno de los aspectos a resaltar es que para la clase alta existe un comportamiento que sigue una ley de potencia, mientras que para la clase baja se sigue el comportamiento de una distribución exponencial. En este sentido, los repartos de la riqueza en un sector resultan ser más equitativos bajo una ley exponencial. Es por esto que se platean ciertos modelos cinéticos para analizar como afecta incorporar efectos en estos modelos, tales como el de solidaridad, de ahorro o sin ahorro, esto con el fin de entender como se ve afectada esta distribución de la riqueza en las distintas clases sociales, midiendo el índice de desigualdad que llegan a tener y comparando con el resto de modelos que se han propuesto. La importancia de estudiar estos modelos reside en que se ha observado que describen de una forma acertada los comportamientos que existentes entre las clases sociales.
En este sentido, el presente trabajo se compone de cuatro principales secciones, en la primera se da una introducción a elementos de termoestadística, así como algunos conceptos básicos que nos ayudarán a comprender las características consideradas en los modelos. Posteriormente, se introducen conceptos de econofísica, que nos ayudan a comprender y conocer los distintos modelos propuestos, posteriormente se hace una revisión a las medidas de desigualdad, finalmente se presentan las conclusiones obtenidas en el presente trabajo.

Capítulo 2

Elementos de Termoestadística

Ludwig Boltzmann (1844,1906) físico austriaco, tuvo importantes aportes en la mecánica estadística, uno de ellos fue el hallazgo de la expresión de la entropía, desde un punto de vista probabilístico, que relaciona los estados macroscópicos y microscópicos. En este sentido, se muestra particular interés por la entropía vista desde este punto, pues para un sistema termodinámico, la probabilidad termodinámica W, que nos establece el número total de posiciones y velocidades, es decir, de microestados, un sistema de N partículas, tiene probabilidad termodinámica de W^N. En estadística termodinámica, la entropía se considera proporcional a $\ln(W^N)$, es decir, $S \propto N \ln(W)$ y esto establece la relación de Boltzmann:

$$\frac{S}{N} = k \ln W$$

La entropía entonces, nos permite ver que cualquier proceso que incremente el número de microestados disponibles, aumenta su entropía y viceversa. Por lo tanto, para un sistema aislado, los procesos ocurren solo en una dirección tal que aumenta el número de microestados disponibles para el sistema, lo que hace que tengamos menos conocimiento sobre la condición de las partículas individuales. Aunque existen distintas expresiones para la entropía, nos enfocamos en el presentado durante este trabajo pues nos permite conocer la cantidad de microestados disponibles en un sistema, que como se expone más adelante, resulta importante en el estudio de los modelos cinéticos para la distribución de la riqueza.

2.1. Entropía

La siguiente expresión:

$$S = k \ln W \tag{2.1}$$

Define una cantidad macroscópica llamada entropía S, en términos de la multiplicidad W de grados microscópicos de libertad de un sistema. Mostremos que la entropía, puede ser escrita en términos de probabilidades p_i, es decir

$$\frac{S}{k} = -\sum_{i}^{t} p_i \ln p_i \tag{2.2}$$

Esta expresión es equivalente a la expresión de multiplicidad $S = k \ln W$. Lancemos un dado de t-lados, N número de veces. La multiplicidad serán los posibles resultados y está dada por la expresión:

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_t!} \tag{2.3}$$

Donde n_i es el número de veces que cae la i-ésima cara del dado. Usando la aproximación de Stirling[1].

$$x! \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Entonces (2.3) se puede escribir de la forma:

$$W = \frac{(N/e)^N}{(n_1/e)^{n_1}(n_2/e)^{n_2} \cdots (n_t/e)^{n_t}}$$

Y definiendo la probabilidad frecuentista $p_i = n_i/N$

$$= \frac{N^N}{n_1^{n_1} n_2^{n_2} \cdots n_t^{n_t}} = \frac{1}{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}}$$

Tomando el ln de ambos lados

$$\ln W = -\sum_{i=1}^{t} n_i \ln p_i$$

Por propiedades de los logaritmos, dividiendo entre N

$$\frac{1}{N} \ln W = -\sum_{i=1}^{t} p_i \ln p_i = \frac{S}{k}$$

Notemos que justamente es la definición de (2.1).

2.1.1. Maximizar la Entropía Cuando No Hay Restricciones

Se tira un dado de t-lados que no está cargado, un número considerable de veces. Entonces, la suma de las probabilidades debe sumar 1. Así, el cambio que sufra la probabilidad debe sumar cero, por ejemplo, $p_1 + p_2 = 1$, entonces $dp_1 + dp_2 = 0$. Generalizando lo anterior:

$$\sum_{i=1}^{t} p_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{t} dp_i = 0 \tag{2.4}$$

Se buscará la distribución $(p_1, p_2, \cdots, p_t) = (p_1^*, p_2^*, \cdots, p_t^*)$ que haga que la función $S(p_1, p_2, \cdots, p_t) = -k \sum_i p_i \ln p_i$ tenga un máximo sujeto a la condición (2.4). Esto lo hacemos para garantizar que S, además de ser máximo, cumpla que $\{p_i^*\}$ sea una distribución de probabilidad, satisfaciendo los axiomas de probabilidad.
Usando multiplicadores de Lagrange, donde α es usado para imponer la condición (2.4), donde la función de Lagrange se define como:

$$S_{Lagrange} = S - \alpha h$$

Donde h es la restricción de (2.4).

$$h = \sum_{i=0}^{t} p_i$$

Así, tendremos lo siguiente:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p_i}\right)_{p_j \neq i} - \alpha = 0$$

Y derivando:

$$\sum_{i=1}^{t} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial p_i}\right)_{p_j \neq i} - \alpha = 0\right] dp_i = 0$$

Si ponemos atención al término dentro del paréntesis y lo igualamos a cero, en particular una i específica, digamos $i = 4$. Usando la ecuación en (2.4), si tomamos la derivada con respecto de p_4, $\partial S/\partial p_4$. Tomando el resto de probabilidades $(p_1, p_2, ..., p_t)$ como constantes, $\partial S/\partial p_4 = -1 - \ln p_4$ para este caso, pero en general $\partial S/\partial p_i = -1 - \ln p_i$. Por lo tanto la solución es:

$$-1 - \ln p_i - \alpha = 0 \qquad \Rightarrow p_i^* = e^{-1-\alpha} \;\; \forall i \tag{2.5}$$

Claramente, al sustituir en la restricción, se tiene que:

$$\sum_{i=0} t p_i = t e^{-1-\alpha} = 1$$

Como

$$p_i^* = e^{-1-\alpha} \Rightarrow t p_i^* = 1$$
$$\therefore p_i^* = \frac{1}{t} \tag{2.6}$$

Maximizar la entropía nos dice que cuando no hay sesgo, todas las salidas son igualmente probables, es decir, existe equiprobabilidad.

2.1.2. Maximizar la Entropía Cuando Hay Restricciones

Tiremos un dado de t-lados, con cada lado enumerado $i = 1, 2, ..., t$. Se desconoce la distribución de los resultados de cada cara, pero se conoce el resultado final después de N tiradas, se desea conocer la función de distribución. Si suponemos que cae el lado i, se le asigna una puntuación ϵ_i, entonces, después de las N tiradas, la puntuación total será $E = \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i n_i$, donde n_i es el número de veces que se ha observado la cara i. Sea $p_i = n_i/N$ la fracción de N tiradas en las cuáles se observó la cara i, entonces el promedio por tirada $\langle \epsilon \rangle$ será:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{E}{N} = \sum_{i=1}^{t} p_i \epsilon_i \tag{2.7}$$

Si nos preguntamos por la distribución $(p_1^*, p_2^*, \cdots, p_t^*)$ que sea consistente con el promedio antes observado $\langle \epsilon_i \rangle$. Entonces, buscamos la ecuación que maximice la entropía.

$$\frac{S}{K} = -\sum_{i=1}^{t} p_i ln p_i$$

Sujeto a las dos condiciones siguientes:

1. Axioma de probabilidad

$$g(p_1, p_2, \cdots, p_t) = \sum_{i=1}^{t} p_i = 1 \qquad \Rightarrow \sum_{i=1}^{t} dp_i = 0 \tag{2.8}$$

2. Promedio

$$h(p_1, p_2, \cdots, p_t) = \langle \epsilon_i \rangle = \sum_{i=1}^{t} p_i \epsilon_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i dp_i = 0 \tag{2.9}$$

Por lo tanto $S_\lambda = S - \alpha g - \beta h$. Que resolviendo por multiplicadores de Lagrange, tendremos:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p_i}\right) - \alpha \left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) - \beta \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\right) = 0 \tag{2.10}$$

para $i = 1, 2, \cdots, t$. Donde α y β son los multiplicadores desconocidos. Si evaluamos las derivadas parciales para cada p_i.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p_i}\right) = -1 - ln p_i, \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) = 1, \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\right) = \epsilon_i \tag{2.11}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.11) en (2.10) se tendrán t ecuaciones de la forma:

$$-1 - \ln p_i^* - \alpha - \beta \epsilon_i = 0 \tag{2.12}$$

Donde cada p_i^* es el valor de p_i que maximiza la entropía. Si resolvemos (2.12) para cada p_i^*, tenemos:

$$p_i^* = e^{-1-\alpha-\beta\epsilon_i} \tag{2.13}$$

La restricción (2.8) es además una condición de normalización, al sustituir (2.13) en (2.8) se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{t} p_i^* = e^{-1-\alpha} \sum_{i=0}^{t} e^{-\beta\epsilon_i} = 1$$

pero

$$p_i^* = e^{-1-\alpha} e^{-\beta\epsilon_i}$$

$$\Rightarrow e^{-1-\alpha} = \frac{p_i^*}{e^{-\beta\epsilon_i}}$$

Sustituyendo $p_i^* e^{-\beta\epsilon_i} \sum_j e^{-\beta\epsilon_j} = 1$

$$\therefore p_i^* = \frac{e^{-\beta\epsilon_i}}{\sum_j e^{-\beta\epsilon_j}} \tag{2.14}$$

Que es una distribución exponencial. En este caso, el denominador es conocido como una función de partición q.

$$q = \sum_{i=1}^{t} e^{-\beta\epsilon_i} \tag{2.15}$$

Usando las ecuaciones (2.9) y (2.14) podemos expresar el promedio por cada tirada $\langle\epsilon\rangle$ en términos de la distribución.

$$\langle\epsilon\rangle = \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i p_i^* = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i e^{-\beta\epsilon_i}, \tag{2.16}$$

La maximización de la entropía nos proporciona algo llamado Principio de Reparto Equitativo. Cada micro-estado, particularmente cada secuencia microscópica de resultados, es igualmente probable de salir que cualquier otra. Dado que cualquier macro-estados que se observe está hecho de un número distinto de micro-estados, la probabilidad de observar el macro-estado es proporcional a su número de micro-estados. Por lo tanto, en un sistema modelado se deben tratar a todas las salidas de manera justa, comparada con cualquier otra. En ese sentido, si la probabilidad no es especificada, entonces la máxima entropía funciona como una buena aproximación a que todas las secuencias microscópicas sean igualmente probables. Por otro lado, si $\langle\epsilon\rangle$ es un valor dado, entonces la distribución obtenida al maximizar la entropía proporciona una aproximación al sistema a tener un reparto tan equitativo como sea posible, satisfaciendo las restricciones.

2.2. Conceptos de Termodinámica

La termodinámica comprende una serie de elementos y herramientas basados en la energía y entropía de un sistema. En este sentido, la termodinámica estudia estudia las transformaciones de la energía, reversibles e irreversibles, en forma de calor y trabajo de los sistemas macroscópicos, nos ayuda además a comprender los efectos de los cambios de temperatura, presión y volumen de un sistema físico, a un nivel macroscópico. En esta sección se introducirán algunas definiciones necesarias para entender los sistemas termodinámicos. Comencemos por definir un sistema termodinámico y algunos de los sistemas de nuestro interés.
Sistema Termodinámico: Un sistema termodinámico es una colección de materia en cualquier forma, delimitada por sus alrededores mediante límites imaginarios o reales. A continuación, se presentan algunas definiciones de los sistemas termodinámicos que son de nuestro interés.
Sistema Abierto: Es aquél sistema que puede intercambiar energía, volumen y materia con sus alrededores.
Sistema Cerrado: Aquél sistema en el que la energía puede cruzar los límites que lo componen, pero la materia no. Sin embargo, los límites en estos sistemas puedes ser o no estacionarios.
Sistema Aislado: La energía y materia no pueden cruzar los límites del sistema. El volumen es constante, los límites son fijos y la energía total del sistema es constante. Estos sistemas son una idealización común en termodinámica, pues en la realidad no es posible tener un sistema completamente aislado.
Sistema Simple: Un sistema simple es definido como un sistema homogéneo con una sola fase donde la fase es una parte homogénea del sistema que es mecánicamente separable del resto del sistema, la homogeneidad nos indica que factores como la temperatura, presión y concentración son uniformes.
Los sistemas termodinámicos tienen ciertas propiedades llamadas extensivas e intensivas. Una propiedad extensiva P es aquella que se puede expresar como la suma de las propiedades $P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$ de sus subsistemas componentes. Algunas variables extensivas son:
Energía Interna: La energía interna U de un sistema es una propiedad extensiva, pues para un sistema de partículas independientes, la energía del sistema es la suma de las energías de las partículas.

$$U = \sum_{i=1}^{t} N_i \epsilon_i$$

Donde, t es el número de niveles de energía.
N_i es el número de partículas en el nivel de energía i.
ϵ_i energía al nivel i.
Entropía: La entropía de un sistema es la suma de las entropías de los subsistemas independientes.
Por otro lado, las propiedades se denominan intensivas cuando no es posible expresarla como suma de las propiedades de los subsistemas. En este sentido, estas propiedades dependen del tamaño del sistema. Algunos ejemplos de pro-

piedades intensivas son:
Volumen Específico: El volumen específico es definido como el recíproco de la densidad $v = \frac{1}{\rho}$. Es el volumen por unidad de masa, donde este volumen puede variar de un punto a otro.
Presión: Considerando un área pequeña, A, que pasa por un punto en un fluido en reposo. El fluido en un lado del área ejerce una fuerza de compresión sobre él que es normal al área, F_{normal}. El fluido del otro lado ejerce una fuerza igual pero de dirección opuesta sobre el área. Para un fluido en reposo, ninguna otra fuerza actúa sobre el área. La presión, p, en el punto especificado se define como el límite:

$$p = \lim_{A \to A'} \frac{F_{normal}}{A}$$

2.2.1. Leyes de la Termodinámica

Ley Cero de la Termodinámica o Principio del Contacto Térmico
El calor fluye del objeto con mayor temperatura al que tiene menor temperatura, en sistemas en contacto térmico. Es decir, para cada sistema termodinámico en equilibrio una propiedad llamada temperatura, lo que permite el equilibrio térmico en un sistema.
Primera Ley de la Termodinámica o Principio de la Conservación de la Energía
Conocida como la ley de la conservación de energía, donde se establece que el trabajo total de las fuerzas que interactúan en un cuerpo desde sus alrededores es igual a la suma de los cambios en las energías cinética y potencial del cuerpo. Así, se establece una equivalencia entre una cantidad q de calor y w de trabajo.

$$\Delta U = q + w \tag{2.17}$$

Segunda Ley de la Termodinámica o Principio de Máxima Entropía
En la segunda ley se establecen dos importantes afirmaciones, (1) Clausius, (2) Kelvin-Planck.
La afirmación de Clausius establece que:

> Es imposible que cualquier sistema funcione de tal manera que el único resultado sea una transferencia de energía por calor de un cuerpo más frío a uno más caliente.

Por otro lado, Kelvin-Planck establece:

> Es imposible que cualquier sistema funcione en un ciclo termodinámico y entregue una cantidad neta de energía por trabajo a su entorno mientras recibe energía por transferencia de calor de un solo depósito térmico.

Así como también establece el principio de la maximización de la entropía, expuesto en la Sec. 2.2.2 y Sec. 2.2.3.
Tercera Ley de la Termodinámica o Principio de Nerst del Cero Absoluto

La tercera ley de la termodinámica establece que la entropía de una sustancia a una temperatura de cero absoluto $0°K$ es cero.

2.3. Física-Estadística

La física-estadística es una rama de la física que nos permite conocer las propiedades macroscópicas de materiales a partir de la dinámica de sus átomos y/o moléculas de los que están compuestos. Consideremos un sistema formado con N partículas. Cada partícula tiene una energía interna dada por sus propiedades intrínsecas, por ejemplo, distintas energías internas resultan de distintos estados de rotación o vibración de las moléculas. Si consideramos interacciones entre un par de partículas de un arreglo especifico de todo un sistema E_j, la suma total de todas ellas y sus energías internas, tendremos que la energía más baja sera E_1. Donde E_j es la energía de cualquier sistema en general y ϵ_j es la energía de un sistema simple de partículas independientes. Considerando un sistema de N partículas, donde estas son de un solo tipo. Supongamos un sistema de t niveles de energía E_j $j = 1, 2, \cdots, t$. Dadas las energías E_j se desea obtener las probabilidades p_j de que el sistema esté en cada nivel j. Supongamos que (T, V, N) son cantidades macroscópicas constantes. Entonces la condición de equilibrio es $dF = dU - TdS = 0$ que viene dada por el diferencial de la ecuación de energía libre de Helmholtz, pues esta se contempla a temperatura constante y nos permite saber que el sistema está en equilibrio. Aplicando multiplicadores de Lagrange, se necesita obtener dS, usando la ecuación (2.2) para la entropía como función de las probabilidades p_j tenemos que:

$$\frac{S}{k} = -\sum_{j=1}^{t} p_i \ln p_i$$

Derivando respecto de p_i $(p_{i \neq j} = cte.)$.

$$dS = -k \sum_{j=1}^{t} 1 + \ln p_j dp_j \tag{2.18}$$

Para obtener dU, se postula que la energía interna U que es la cantidad macroscópica en termodinámica, la fijaremos como el promedio de todos los microestados.

$$U = \langle E \rangle = \sum_{j=1}^{t} p_j E_j \tag{2.19}$$

$$dU = d\langle E \rangle = \sum_{j=1}^{t} (E_j dp_j + p_j dE_j) \tag{2.20}$$

Como la energía macroscópica U, la energía de los niveles $E_j = E_j(V, N)$ dependen de V y N. Pero no de S o T. Entonces (2.19) se convierte en la siguiente expresión, pues E_j no depende de la temperatura.

$$d\langle E\rangle = \sum_{j=1}^{t} E_j dp_j \tag{2.21}$$

Por la primera ley de la termodinámica $dU = \delta q + \delta w$ que se reduce a $d\langle E\rangle = dU \neq \delta q$ cuando V y N son constantes, pues la ecuación (2.20) se aplica cuando $V = cte$, se sigue que el término $\sum_j E_j dp_j$ es el calor y $\sum_j p_j dE_j$ es el trabajo. Buscamos la distribución que satisfaga las condiciones de equilibrio $dF = d\langle E\rangle - TdS = 0$ sujeto a las condición siguiente:

1. Suma de probabilidades igual a 1:
   $\sum_{j=1}^{t} p_j = 1$

Aplicando un multiplicador de Lagrange:

$$\alpha \sum_{j=1}^{t} dp_j = 0 \tag{2.22}$$

Sustituyendo (2.18) y (2.20) $-$ (2.22) en $dF = dU - TdS = 0$ obtenemos:

$$dF = \sum_{j=1}^{t} \left[E_j + kT(1 + \ln p_j^*) + \alpha \right] dp_j^* = 0 \tag{2.23}$$

Como el término dentro del paréntesis de (2.23) debe ser igual a cero, tendremos t ecuaciones de la forma:

$$\ln \quad p_j^* = -\frac{E_j}{kT} - \frac{\alpha}{kT} - 1 \tag{2.24}$$

$$p_j^* = e^{-E_j/KT} e^{-(\alpha/KT+1)} \tag{2.25}$$

Para eliminar α escribimos la restricción:

$$\sum_{j=1}^{t} p_j^* = 1$$

como:

$$1 = \sum_{j=1}^{t} e^{-E_j/KT} e^{-(\alpha/KT+1)}$$

Haciendo lo mismo que en la ecuación (2.13) por esta forma de la restricción, tenemos:

$$p_j^* = \frac{e^{-E_j/kT}}{\sum_{j=1}^{t} e^{-E_j/kT}} = \frac{e^{-E_j/kT}}{Q} \tag{2.26}$$

Conocida como la Ley de Distribución de Boltzmann. Donde Q es la función de partición.

$$Q = \sum_{j=1}^{t} e^{-E_j/kT} \tag{2.27}$$

2.3.1. Función de Partición para Partículas Distinguibles

La distribución de Boltzmann aplica a cualquier sistema de cualquier grado de complejidad, las probabilidades p_j pueden representar estados $j = 1, 2, \cdots, t$ de átomos en un gas ideal. Consideremos un sistema compuesto de subsistemas independientes. En un gas ideal, cada molécula se asume independiente de otra. En este caso, la energía total del sistema es la suma de las energías de cada partícula y la función de partición del sistema es el producto de las funciones de partición de cada partícula.
Primero, consideremos un sistema con partículas distinguibles, en un sistema con energía E_j, supongamos que el sistema tiene dos subsistemas independientes, es decir, dos partículas distinguibles y etiquetadas como A y B, con niveles de energía ϵ_i^A y ϵ_m^B respectivamente, $i = 1, 2, \cdots, a$, $m = 1, 2, \cdots, b$.
La energía del sistema es $E_j = \epsilon_i^A + \epsilon_m^B$. Como los subsistemas son independientes, tenemos una función de partición para cada sistema, q_A para el sistema A y q_B para el sistema B.

$$q_A = \sum_{i=1}^{a} e^{-\epsilon_i^A/KT} \qquad q_B = \sum_{m=1}^{b} e^{-\epsilon_m^B/KT} \tag{2.28}$$

La función de partición Q para el sistema entero, será la suma de los factores de Boltzmann $e^{-E_j/KT}$ sobre los niveles de energía $j = ab$.

$$Q = \sum_{j=1}^{t} e^{-E_j/KT} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{b} e^{-(\epsilon_i^A+\epsilon_m^B)/KT} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{m=1}^{b} e^{-\epsilon_i^A/KT} e^{-\epsilon_m^B/KT} \tag{2.29}$$

Y como los subsistemas son independientes, la ecuación (2.30) tiene la forma

$$Q = \sum_{i=1}^{a} e^{-\epsilon_i^A/KT} \sum_{m=1}^{b} e^{-\epsilon_m^B/KT} = q_A q_B \tag{2.30}$$

Por lo tanto, de manera más general para un sistema de N partículas independientes y distinguibles, cada función de partición q, la función de partición del sistema entero será:

$$Q = q^N \tag{2.31}$$

2.3.2. Función de Partición para Partículas Indistinguibles

Las moléculas en un gas son indistinguibles. No podemos etiquetarlas como en la situación anterior. Por lo tanto, para un sistema con dos partículas indistinguibles, la energía total es $E_j = \epsilon_i + \epsilon_m$.
Donde $i = 1, 2, \cdots, t_1$ y $m = 1, 2, \cdots, t_2$. El sistema tendrá como función de partición:

$$Q = \sum_{j=1}^{t} e^{-E_j/KT} = \sum_{i=1}^{t_1}\sum_{m=1}^{t_2} e^{-(\epsilon_i+\epsilon_m)/KT} \tag{2.32}$$

En general $Q = \sum_{i=1}^{t_1} \sum_{m=1}^{t_2} e^{-(\epsilon_i+\epsilon_m)/KT} \neq q_A q_B$. Entonces $Q = q^2/2!$. Esto dado que, si suponemos dos partículas distinguibles A, B es posible observar que se cumple:

$$Q = q_A q_A \cdot q_B q_B$$

Pero considerando los términos contados de más, y dividiendo entre el número de combinaciones posibles, tenemos:

$$\Rightarrow Q = \frac{q^2}{2!}$$

Por lo tanto, para N partículas indistinguibles, generalizamos el argumento anterior y la función de partición del sistema Q será:

$$Q = \frac{q^N}{N!} \tag{2.33}$$

2.4. Propiedades Termodinámicas

La mecánica estadística nos permite obtener las cantidades promedio que se relacionan con las cantidades macroscópicas o termodinámicas a partir de las derivadas de su función de partición. En este sentido, las siguientes propiedades termodinámicas son posibles de predecir a partir de su función de partición.

2.4.1. Energía Interna

Consideremos un sistema con (T, V, N) cantidades fijas, para obtener la energía interna de un sistema con energías E_j, sustituyendo la ecuación (2.26) para p_j^* en la ecuación (2.19)

$$U = \sum_{j=1}^{t} p_j^* E_j = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{t} E_j e^{-\beta E_j} \tag{2.34}$$

Con $\beta = \frac{1}{kT}$

$$\frac{dQ}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \sum_{j=1}^{t} e^{-\beta E_j} = -\sum_{j=1}^{t} E_j e^{-\beta E_j} \tag{2.35}$$

Comparando ambas expresiones

$$U = -\frac{1}{Q}\left(\frac{dQ}{d\beta}\right) = -\left(\frac{d\ln Q}{d\beta}\right) \tag{2.36}$$

Como $\beta = 1/kT$, entonces tendremos:

$$\frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{kT^2} \tag{2.37}$$

Multiplicando la ecuación (2.37) por $-1/kT^2$ y por $d\beta/dT$ tenemos:

$$\frac{U}{kT^2} = \left(\frac{d\ln Q}{dT}\right) \tag{2.38}$$

Escribiéndola de otra forma.

$$\frac{U}{kT^2} = \frac{d\ln Q}{d\ln T} = \left(\frac{T}{Q}\right)\frac{dQ}{dT} \tag{2.39}$$

2.4.2. Energía Promedio

Si las partículas son independientes y distinguibles ($Q = q^N$) la energía promedio por partícula está dada por:

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{U}{N} = \frac{KT^2}{N}\left(\frac{\partial \ln q^N}{\partial T}\right) = KT^2\left(\frac{\partial \ln q}{\partial T}\right) = -\left(\frac{\partial \ln q}{\partial \beta}\right) \tag{2.40}$$

2.4.3. Entropía

De la ecuación de la entropía antes escrita, tenemos:

$$\frac{S}{k} = -\sum_{j=1}^{t} p_j \ln p_j$$

Sustituyendo la distribución de Boltzmann $p_j^* = \frac{1}{Q}e^{-E_j/kT}$ en la ecuación de la entropía.

$$\frac{S}{K} = -\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{1}{Q}e^{-E_j/KT}\right)\left[\ln\left(\frac{1}{Q}\right) - \frac{E_j}{KT}\right] \tag{2.41}$$

Sustituyendo la ecuación (2.27) para Q y (2.35) para U tendremos:

$$S = \ln Q + \frac{U}{T} = k\ln Q + kT\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial T}\right) \Rightarrow S = k\ln Q + \frac{U}{T} \tag{2.42}$$

Para un sistema con N partículas independientes y distinguibles donde $Q = q^N$

$$S = kN\ln q + \frac{U}{T} \tag{2.43}$$

Como S incrementa linealmente con N, la entropía del sistema es la suma de las entropías de las partícula independientes.
Finalmente, hagamos un pequeño resumen de las cantidades termodinámicas que se derivan de la función de partición.

Energía Interna U: $\quad U = kT^2\left(\frac{d\ln Q}{dT}\right)$

Entropía S: $\quad S = k\ln Q + \frac{U}{T}$

Energía Libre de Helmholtz F: $\quad F = U - TS = -kT\ln Q$

2.4.4. Gas Ideal

Energía Interna de un Gas Ideal:
Se desean calcular las cantidades termodinámicas para un modelo de gas ideal, comenzando por la energía interna U. Tenemos que para un sistema con partículas independientes y distinguibles, $Q = q^N$, su energía promedio es calculada mediante la expresión:

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{U}{N} = \frac{KT^2}{N}\left(\frac{\partial \ln q^N}{\partial T}\right)_{V,N}$$

$$= KT^2\frac{\partial \ln q}{\partial T} = -\frac{\partial \ln q}{\partial \beta}$$

Entonces, la siguiente ecuación expresa la energía interna U en términos de la función de partición q y un número de partículas N, así:

$$U = NKT^2\frac{\partial \ln q}{\partial T} \tag{2.44}$$

Expresando a q como un producto que depende de la temperatura, es decir:

$$q = \left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right)^{3/2} VT^{3/2}$$

Y sustituyendo en la ecuación (2.44), tenemos:

$$U = \frac{NKT^2}{q}\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right) = \frac{NKT^2}{cT^{3/2}}\left(\frac{3}{2}cT^{1/2}\right) = \frac{3}{2}NKT \tag{2.45}$$

Con $c = \frac{2\pi mk}{h^2}$.

Entropía de un Gas Ideal:
Tenemos que la función de partición para un gas, donde:

$$Q = \frac{q^N}{N!}$$

y usando la función de la energía interna previamente calculada, tenemos:

$$S = k\ln\left(\frac{q^N}{N!}\right) + \frac{U}{T} = Nk\ln q - k(N\ln N - N) + \frac{3}{2}Nk$$

Usando la aproximación de Stirling.

$$= Nk\left(\ln q - \ln N + \frac{5}{2}\right) = Nk\left(\frac{qe^{5/2}}{N}\right)$$

$$S = NK\ln\left[\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\left(\frac{e^{5/2}}{N}\right)V\right]$$

Energía Libre de Helmholtz de un Gas Ideal:
Nuevamente, usando la función de partición $Q = \frac{q^N}{N!}$ y sustituyendo en la ecuación de energía libre de Helmholtz, tenemos que:

$$F = -kT \ln Q = -kT \ln \left(\frac{q^N}{N!} \right)$$

Usando la aproximación de Stirling para $N!$:

$$= -kT \ln \left[\left(\frac{eq}{N} \right)^N \right]$$

$$F = -NkT \ln \left(\frac{eq}{N} \right) = -NkT \left(1 + \ln q - \ln N \right). \tag{2.46}$$

Capítulo 3

Econofísica: Modelos Cinéticos para la Distribución de la Riqueza

La econofísica es una rama de la física encargada de aplicar ciertos modelos que fueron originalmente hechos para la física con un enfoque a los sistemas económicos y financieros [**3**]. En esta sección se introducirán algunos modelos desarrollados por la econofísica para analizar la dinámica de ciertos sistemas.

3.1. Modelos de Intercambio

En analogía a la colisión de dos partículas con el resultado de un cambio en su energía cinética, en los modelos cinéticos de intercambio, dos agentes que son tomados de manera aleatoria, de un conjunto de agentes de tamaño N, interactúan entre ellos, en un intercambio de una cantidad m de dinero predefinida que se da en pares, donde esta cantidad se refiere a la riqueza que posee un agente. Estos agentes, son caracterizados por su riqueza actual $m_i, i = 1, 2, \cdots, N$ y por algún parámetro, como el de ahorro, denotado por λ_i [**10**]. Así, el sistema evoluciona en el tiempo siguiendo la dinámica macroscópica siguiente:

$$
\begin{aligned}
m_i(t+1) &= m_i(t) - \Delta m \\
m_j(t+1) &= m_j(t) + \Delta m
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Donde Δm es la cantidad de dinero a intercambiar. Es notorio que la riqueza total de los agentes es una cantidad conservada, esto es:

$$m_i(t+1) + m_j(t+1) = m_i(t) + m_j(t)$$

Pues se considera una economía cerrada en donde la cantidad total de dinero M y el total de los agentes N que interactúan en ella se mantienen fijos. Esto es

análogo a lo que sucede para las partículas donde aplica la ley de la conservación de energía en las colisiones elásticas.
En el estudio de estos modelos surge una distribución conocida como la distribución de Gibbs, derivada del análisis de equilibrio del sistema económico que contempla los supuestos anteriores.

3.1.1. Distribución de Gibbs

Consideremos un sistema de N agentes donde cada uno posee una cantidad m_i de dinero [**5**]. Los agentes económicos interactúan al azar con una cantidad inicial de dinero, se permiten transacciones binarias aleatorias y se decide intercambiar una proporción de la riqueza que ambos poseen. El modelo más simple que se puede considerar es uno donde la cantidad de dinero intercambiada es de la siguiente forma:

$$\Delta m = \epsilon(m_i + m_j) - m_i \tag{3.2}$$

Con ϵ una variable aleatoria uniformemente distribuida. Como hemos mencionado anteriormente, la cantidad m es aquella que representa la riqueza de cada agente y Δm la cantidad a intercambiar, en este sentido, esta cantidad puede ser constante, es decir:

$$\Delta m = \Delta m_0 \tag{3.3}$$

O bien puede ser una cantidad aleatoria de la riqueza de ambos agentes

$$\Delta m = \epsilon m_i(t) - (1-\epsilon) m_j(t) \tag{3.4}$$

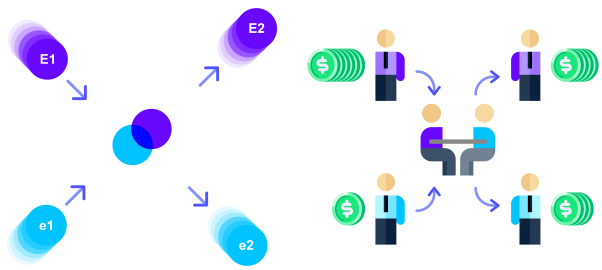
Donde ϵ es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 1, además, esta es actualizada entre cada transacción.
De esta forma, es posible reescribir la ecuación (3.1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= \epsilon(m_i(t) + m_j(t)), \\ m_j(t+1) &= (1-\epsilon)(m_i(t) + m_j(t)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si se deja interactuar a los N agentes durante un tiempo, bajo las ecuaciones (3.1) y (3.2) eventualmente la distribución del dinero entre los agentes no cambiará, es decir, se habrá llegado al estado estacionario y para esta dinámica se obtiene la llamada distribución de Gibbs.

$$P(m) = \frac{1}{T} e^{-m/T}; \qquad T = M/N, \tag{3.6}$$

Donde al capital promedio por agente se le ha llamado la "temperatura económica", en analogía con la definición termodinámica.



La distribución de equilibrio de la función $P(m)$ es análoga a la función de distribución de la energía $P(\epsilon)$ en un gas de partículas en Física. En analogía con el intercambio de energía de las partículas en un gas, se hacen los intercambios entre agentes en un sistema.

3.2. Modelo con Ahorro Uniforme

Si ahora en un sistema donde se dejan interactuar a N agentes, se agrega la hipótesis donde cada agente conserva un porcentaje ahorrado λ que no está presente en las transacciones que realice. Es decir:

$$m_i(t+1) = \lambda m_i(t) + \epsilon[(1-\lambda)(m_i(t)+m_j(t))]$$

$$m_j(t+1) = \lambda m_j(t) + (1-\epsilon)[(1-\lambda)(m_i(t)+m_j(t))] \tag{3.7}$$

Donde: ϵ es una variable aleatoria uniformemente distribuida, y $\lambda \in [0,1]$, fija para todos los agentes. Aquí, es notorio que Δm de la ecuación (3.3) está dado por:

$$\Delta m = (1-\lambda)\big[(1-\epsilon)m_i(t) - \epsilon m_j(t)\big] \tag{3.8}$$

Nuevamente, si dejamos a los agentes interactuar en cada paso siguiendo (3.7), después de un tiempo se habrá llegado al estado estacionario y se obtendrá lo siguiente:

$$P(m) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} m^{n-1} e^{-nm}, \tag{3.9}$$

Donde $\Gamma(n)$ es la función Gamma, y se definió la función:

$$n(\lambda) = 1 + \frac{1+2\lambda}{1-\lambda}, \tag{3.10}$$

Asociada al factor de forma. La distribución (3.9) es la función Gamma, la cual se graficó en la figura 3.1. En la figura se puede notar que entre mayor sea el ahorro, la distribución es más simétrica, hay una cantidad mayor de agentes con una cantidad similar de dinero, no hay agentes con una cantidad nula y muy pocos agentes tienen una gran cantidad de dinero y podríamos decir la distribución del dinero es más igualitaria. Por otro lado, si se contempla λ_i distinta para todos los i agentes económicos y esta además es aleatoria uniformemente distribuida

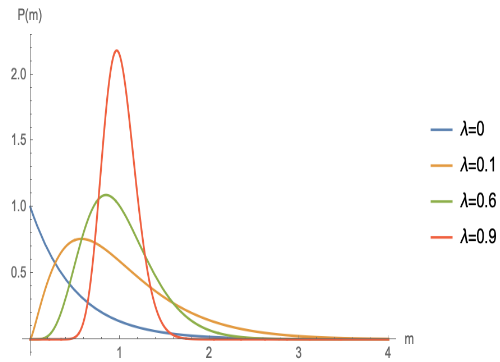


Figura 3.1: Gráfica de la distribución del dinero de los agentes para distintos valores de λ

en $\lambda_i \in [0, 1)$. Donde los agentes económicos intercambiarán sus bienes de la forma:

$$m_i(t+1) = \lambda_i m_i(t) + \epsilon_{ij}[(1-\lambda_i)m_i(t) + (1-\lambda_j)m_j(t)] \tag{3.11}$$

$$m_j(t+1) = \lambda_j m_j(t) + (1-\epsilon_{ij})[(1-\lambda_i)m_i(t) + (1-\lambda_j)m_j(t)] \tag{3.12}$$

Entonces, después de dejar que los agentes interactúen hasta que su distribución no cambie se recupera la distribución de Pareto, que es de la forma:

$$P(m) = m^{1-\alpha} \tag{3.13}$$

Y se ha visto que se ajusta empíricamente al valor del exponente:

$$\alpha = 1.01 \pm 0.02,$$

Esta es la distribución que se muestra en la figura 3.2.

3.3. Modelo Cinético de Intercambio de Dos Clases con Reglas de Dependencia en la Riqueza

Es bien sabido que en la mayoría de sociedades existe una marcada diferencia entre como se distribuye la riqueza en las distintas clases sociales [**12**]. Mientras que la clase con menor capital sigue una función exponencial, la clase con mayor capital sigue una función de ley de potencia. En este sentido, es posible pensar que las transacciones entre dos agentes de clases distintas no pueden hacer intercambios bajo las mismas condiciones, pues uno de ellos podría no verse favorecido en este intercambio. Es por esto que se impone una restricción adicional. Si dos agentes pertenecen a la misma clase, entonces pueden hacer intercambios de la forma presentada en la ecuación (3.1), pero si no pertenecen

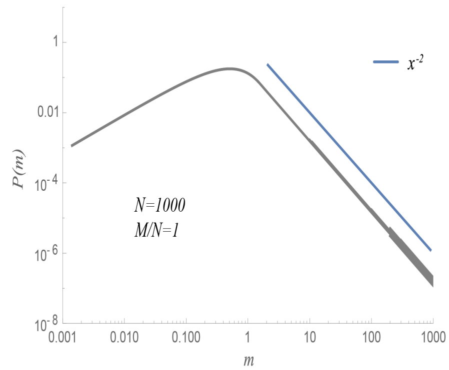


Figura 3.2: Gráfica de la ley de Pareto para un sistema de $N = 1,000$ agentes, x^{-2} funge como una guía a la ley de potencia

a la misma clase, entonces se hace un intercambio de una fracción de riqueza del agente con menor capital, esto define una Δm de la siguiente forma:

$$\Delta m = \epsilon \cdot min\{m_i(t), m_j(t)\} \tag{3.14}$$

Donde ϵ es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre $[0, 1]$ y es actualizada en cada transacción. La regla de intercambio aleatoria se ve modificada por una que depende de la riqueza que tenga cada agente y se definen las probabilidades de ganar la transacción de la siguiente forma:

$$w_i(t) = \frac{m_i(t)}{(m_i(t) + m_j(t))}$$

$$w_j(t) = \frac{m_j(t)}{(m_i(t) + m_j(t))} \tag{3.15}$$

Donde $w_i(t), w_j(t)$ son las probabilidades de ganar la transacción de cada agente i, j, respectivamente a tiempo t.

3.4. Modelo con Efecto Solidario

En la realidad, es difícil pensar que las transacciones son uno a uno cuando los agentes pertenecen a distinta clase social, pues cuando un agente pertenece a una clase social baja e interactúa con uno de clase alta, entonces tiene menos probabilidades de ganar la transacción, es por esto que se considera que los agentes que pertenecen a la clase con menor riqueza, forman coaliciones, esto hace alusión a los sindicatos que se forman entre la clase trabajadora, a esto se le llama efecto solidario [**10**]. Con esta idea, es posible generar un modelo que contemple este efecto solidario, siguiendo los pasos que se presentan a continuación:

1. Se escogen dos agentes de manera aleatoria.
2. Se verifican las clases de los agentes.
3. Si es la misma clase a la que pertenecen, los agentes llevan a cabo transacciones con la regla presentada en la ecuación (3.3).
4. Si pertenecen a diferentes clases, el agente de la clase baja se junta con cierto número de agentes de la misma clase, esto, dependiendo de la proporción de solidaridad en la clase baja η y se aplican las reglas de transacciones vistas en la sección 3.5, pero se definen las probabilidades de ganar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w_i(t) &= \frac{\sum_{k=1}^{N_i} m_k}{\left(\sum_{k=1}^{N_i} m_k + m_j\right)} \\ w_j(t) &= \frac{m_j}{\left(\sum_{k=1}^{N_i} m_k + m_j\right)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

   Donde $N_i = \eta N_{baja} + 1$, N_{baja} representa el número de agentes en la clase baja.
5. Si el agente i gana la transacción, entonces la fracción de capital que gana, Δm, se reparte de manera equitativa a todos los agentes que participaron en la coalición.
6. Cuando el agente i pierde la transacción, únicamente el agente i, pierde la fracción de su riqueza que estuvo en la transacción y el resto de agentes recuperan la suya.

Del modelo anterior es posible destacar dos observaciones importantes, uno son los patrones de ley de potencia observados en la clase baja, bajo las condiciones sin ahorro, ahorro y ahorro heterogéneo, y el otro es la diferenciación intensificada con aumento de la propensión al ahorro homogéneo. En cuanto al último caso, una sociedad no clasificada con un alto la propensión al ahorro está muy cerca de una sociedad igualitaria con un coeficiente de Gini muy bajo [**10**].

3.5. Modelo con Riesgo

Si consideramos ahora un sistema con N agentes donde cada uno de ellos es identificado por su riqueza m y su factor de riesgo r. Donde r representa la fracción de riqueza que cada agente está dispuesto a perder en cada transacción y es el único valor de interacción, además de que se mantiene constante durante todo el proceso de transacciones [**5**]. Dado un par de agentes i, j con riquezas iniciales m_i, m_j su dinámica se describe de la siguiente forma:

$$m_i(t+1) = m_i(t) + (2\eta_{i,j} - 1)\Delta m_{i,j}$$

$$m_j(t+1) = m_i(t) - (2\eta_{i,j} - 1)\Delta m_{i,j} \tag{3.17}$$

Donde $\eta_{i,j} \in 0, 1$ es una variable aleatoria dicotómica, es decir, solo puede tomar dos valores, y $\Delta m_{i,j}$ es una función definida por el modelo, que depende de la riqueza y riesgo de cada agente en las transacciones.
Es bien sabido que en la distribución de Gibbs para el equilibrio de las transacciones aleatorias, muy pocos agentes conservan la mayoría del capital disponible en el sistema, para contrarrestar este efecto, se añade una asimetría a la distribución a través de $\eta_{i,j}$ que favorece a los agentes con menor riqueza en una transacción. En este sentido, se define la probabilidad:

$$p_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{|m_i - m_j|}{m_i + m_j} \tag{3.18}$$

Donde $f \in [0, 1/2]$ es llamado el factor de protección social, así la probabilidad de que la variable $\eta_{i,j}$ tome el valor de k, $P(\eta_{i,j} = k)$ se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(\eta_{i,j} = 0) &= \Theta(m_i - m_j)p_{i,j} + \Theta(m_j - m_i)(1 - p_{i,j}) \\ P(\eta_{i,j} = 0) &= \Theta(m_j - m_i)p_{i,j} + \Theta(m_i - m_j)(1 - p_{i,j}) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Donde Θ es una función de escalón. Esto define una distribución continua para $\eta_{i,j}$. Aquí, se consideran los siguientes modelos:

3.5.1. Modelo Merger-Spinoff

Consideremos un par de agentes i, j con m_i, m_j riquezas y r_i, r_j riesgos, respectivamente. Un agente que pierda la transacción es elegido de manera aleatoria, este agente debe otorgar una fracción de su riqueza al otro agente. Entonces, la cantidad en la interacción entre los agentes será:

$$\Delta m_{i,j} = \eta_{i,j} r_j m_j + (1 - \eta_{i,j}) r_i m_i \tag{3.20}$$

En este modelo, se contempla que el agente carece de la información de cuanto está arriesgando su opositor, esto puede modelar diversas situaciones como los divorcios, fraudes y robos que pueden suceder entre agentes [**5**].

3.5.2. Modelo Yard-Sale

En este modelo, inicialmente los agentes interactúan arriesgando una fracción de su riqueza. En este caso, la cantidad de dinero que van a intercambiar está dado por la cantidad mínima de apuesta entre los agentes. Dado un par de agentes i, j con riquezas m_i, m_j y factores de riesgo r_i, r_j, la cantidad a intercambiar en la transacción será:

$$\Delta m_{i,j} = min(r_i m_i, r_j m_j) \tag{3.21}$$

3.6. Modelo de Lallouache, Chakrabarti, Chakraborti, y Chakrabarti (LCCC)

La importancia de los Modelos Cinéticos reside en la capacidad que tienen de aplicarse en otras ramas, siendo una de ellas la Sociología. En este sentido, el presente modelo tiene como finalidad que los agentes interactúen con la intención de elegir una opción de entre diferentes opciones, tales como la opinión, el lenguaje, el voto a un partido, etc. Así el modelo LCCC, tiene como objetivo hacer una analogía con los modelos cinéticos antes vistos, pero enfocado a las opiniones que pueden tener las personas sobre ciertos temas y como estas se ven influenciadas por el círculo de personas que le rodean.

En este modelo, una opinión se intercambia entre dos agentes. A cualquier tiempo t, una persona es asignada con un valor de opinión $o(t) \in [-1, 1]$, para dos personas i, j la interacción se puede describir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} o_i(t+1) &= \lambda\big[o_i(t) + \epsilon o_j(t)\big] \\ o_j(t+1) &= \lambda\big[o_j(t) + \epsilon' o_i(t)\big], \end{aligned} \tag{3.22}$$

Donde ϵ y ϵ' con variables aleatoria no correlacionadas entre 0 y 1.

Así mismo, es posible incorporar un parámetro de influencia μ, que mide el poder de influencia que pudiera tener una persona sobre de otra, en este caso, la interacción entre dos personas se describe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} o_i(t+1) &= \lambda_i o_i(t) + \epsilon \mu_j o_j(t), \\ o_j(t+1) &= \lambda_j o_j(t) + \epsilon' \mu_i o_i(t). \end{aligned} \tag{3.23}$$

En este modelo se puede observar que el factor de influencia para cada persona será distinto, lo que nos lleva a que no exista homogeneidad en la sociedad.

Finalmente, también es posible incorporar una interacción entre dos agentes que recién se conocen, aquí, la persona i mantiene su opinión, mientras que al interactuar con otra persona j puede llegar a retener una fracción de la opinión de j. Así, la interacción puede ser descrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} o_i(t+1) &= \lambda o_i(t) + \epsilon o_j(t) \\ o_j(t+1) &= \lambda o_j(t) + \epsilon' o_i(t). \end{aligned} \tag{3.24}$$

3.7. Distribución de Pareto

3.7.1. Regla 80-20

Los patrones que describen el reparto de bienes en una sociedad se ajusta a la regla del $80-20$, mientras que el 80 % de la población conserva el 20 % del total de la cantidad de dinero dispuesto en una economía, el 20 % goza de distribuirse el 80 % restante. En las sociedades capitalistas, existen grupos bien diferenciados, mientras que el 95 % de la población se conforma por clases medias y bajas, solamente el 5 % restante constituye una clase privilegiada.

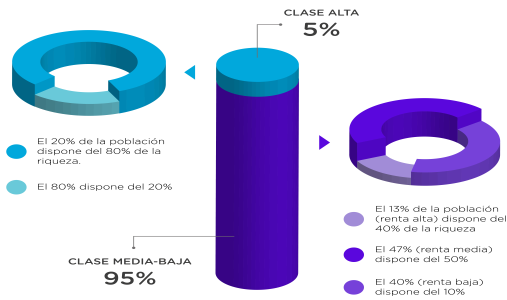


Figura 3.3: Gráfica de la regla $80-20$

3.7.2. Derivación de la ley de Pareto

Asumamos que el cambio en el capital de cada agente i sobre un tiempo finito, está dado por una ley de crecimiento exponencial a una tasa α, esto es:

$$\frac{dm_i}{dt} = \alpha_i m_i \rightarrow \qquad \frac{1}{m_i}\frac{dm_i}{dt} = \sum_i \frac{d \ \ \ln \ \ m_i}{dt} = \alpha_i$$

$$\frac{d}{dt}\sum_i \ln m_i = \frac{d}{dt}\ln \prod_i m_i = 0$$

$$\Rightarrow \ln \prod_i m_i = cte.$$

Donde α_i puede referirse a un coeficiente de habilidad de el agente i.
Si sumamos todos los α_i, tendremos:

$$\sum_i \alpha_i = 0 \rightarrow \qquad \frac{d \ \ \ln \ \ m_i}{dt} = 0$$

Pues α_i está distribuido de manera aleatoria alrededor del cero. Por lo tanto, el capital total de un grupo de N agentes será:

$$M = \sum_i \ln \ \ m_i$$

Que es constante, de la misma forma que la energía interna de un sistema, y esta seguirá una distribución de la forma:

$$p(m_i) = \frac{1}{Z}e^{-\beta \ \ \ln \ \ m_i} = \frac{1}{Z}m_i^{-\beta}, \tag{3.25}$$

Que es la distribución de Pareto y la distribución acumulada tendrá la forma:

$$P(m_i) = \int_m^\infty \frac{1}{Z}m_i^{-\beta}dm = \frac{1}{Z}\frac{m_i^{-\beta+1}}{1-\beta} \tag{3.26}$$

Que representa la probabilidad de tener un capital de al menos m unidades de dinero. Además, obtenemos como función de partición:

$$Z = \int \frac{d^N m}{N!} \prod_i \left(\frac{T_m}{m_i} \right)^{T_m/T} \tag{3.27}$$

Donde T_m es la temperatura máxima permitida en el sistema. Recordemos que la ecuación (2.15) también nos definía una función de partición, que nos ayuda a encontrar el número de estados disponibles que tiene un sistema. Finalmente, la temperatura media del sistema está dada de la forma:

$$\frac{M}{N} = T + T_m \ln \left(\frac{J}{T_m} \right) + \frac{T^2}{T_m - T} \tag{3.28}$$

Capítulo 4

Medidas de Desigualdad

La desigualdad en una sociedad puede ser categorizada de dos formas, la primera contempla una desigualdad de condición, que va relacionada a los ingresos, riqueza o la propiedad de bienes y servicios que un individuo tiene. La segunda es una desigualdad de oportunidades, referida al futuro potencial de cada individuo, como la calidad de educación que pueda recibir, el nivel de educación, el acceso a la salud, etc. Sin embargo, nuestro interés se encuentra en la desigualdad de condiciones, pues es la que contempla la desigualdad económica. En este sentido, podemos preguntarnos, ¿Por qué es importante medir la desigualdad?, ¿La distribución de los ingresos es la misma que la de hace algunos años?, ¿Países subdesarrollados están caracterizados por tener una mayor desigualdad? Dado que la forma en que medimos la desigualdad nos permite contestar estas y otras preguntas, es importante hacer un análisis sobre cómo se mide la desigualdad.

4.1. Curva de Lorenz

La curva de Lorenz fue propuesta por Max O. Lorenz en 1905 , esta curva empieza en la coordenada $(0, 0)$ y termina en la coordenada $(1, 1)$, nos permite graficar el porcentaje de riqueza total de diferentes porciones de una población. La línea de 45° representa la igualdad perfecta, donde todos los individuos reciben la misma cantidad de ingresos. Si se grafica la fracción de población en orden ascendente en el eje x, contra la fracción de ingresos o capital que cada uno retiene, obtendremos la función de distribución F. Lo que nos permite usar a la función de Lorenz como una medida de desigualdad, dado que mientras más cerca este de la línea de perfecta igualdad, la riqueza estará mejor distribuida. Así, la fracción del total de capital retenido por algún porcentaje $x\,\%$ de la población será representado por $y = F(x)$. Conforme estas fracciones crezcan más y más, es decir, $x\,\% \sim y\,\%$, entonces la curva de Lorenz será una línea recta que representará la igualdad perfecta de la distribución de los ingresos.
Por otro lado, cuando la curva se aleje de la diagonal o de la línea a 45° habrá mayor desigualdad en la distribución.

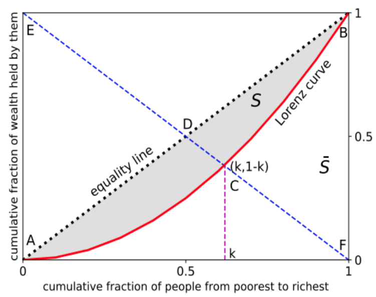


Figura 4.1: Curva de Lorenz. Imagen obtenida de [1]

Un índice de desigualdad es una medida escalar de la diferencia de los ingresos interpersonales dentro de una población dada. Una desigualdad alta en los ingresos, significa que existe una mayor concentración de la riqueza en unas cuántas manos. Los tamaños de las clases media y alta contribuyen al bienestar de la sociedad de manera significativa, en particular, en el crecimiento económico, el acceso a la salud, el nivel de educación y la estructura social.

4.1.1. Función Complementaria de Lorenz

Sea F una función de distribución de una variable aleatoria no negativa X que representa la distribución de los ingresos de una sociedad. La inversa de F, se define como:

$$F^{-1}(q) = \inf_x\{x \in X : F(x) \geq q\} \tag{4.1}$$

Siempre y cuando la media de los ingresos $\mu = \int_0^\infty x dF(x)$ sea finita, obtenemos la representación de la media siguiente:

$$\mu = \int_0^1 F^{-1}(q)dq \tag{4.2}$$

Así, la función asociada a la curva de Lorenz, es la función de Lorenz definida como:

$$L_F(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(q)dq \tag{4.3}$$

Entonces, la función de Lorenz nos otorga una proporción del total de los ingresos obtenidos por un $100p\,\%$ de la clase baja de la población, para cada p dada, donde $p \in [0,1]$.
En particular, la función de Lorenz cumple con las propiedades siguientes:

1. $L_F(p)$ es continua, no decreciente y convexa en $p \in (0,1)$
2. $L_F(0) = 0, L_F(1) = 1, L_F(p) \leq p \quad$ para toda $\; p \in (0,1)$

Si existe $p \in (0,1)$ tal que $L_F(p) = p$, entonces para toda $p \in [0,1]$ se cumple que $L_F(p) = p$.

Si la función $L_F(p)$ es diferenciable en el intervalo abierto $(0,1)$, entonces la pendiente de la función para cualquier $p \in (0,1)$, está dada por $F^{-1}(p)/\mu$. Sea M_F la mediana dada como un porcentaje de la media, definida por la pendiente de la curva de Lorenz en $p = 1/2$, esto es: $M_F = F^{-1}(1/2)/M$. Definimos la función complementaria de Lorenz como $\hat{L}_F(p) := 1 - L_F(p)$. Esta, mide la proporción de los ingresos totales ganados por el $100(1-p)\,\%$ de la población. Entonces tenemos que:

$$\hat{L}_F(p) := 1 - L_F(p) = 1 - \frac{\int_0^p F^{-1}(q)dq}{\mu} = \frac{\int_p^0 F^{-1}(q)dq}{\mu}$$

De lo anterior se sigue:

- $\hat{L}_F(0) = 1$
- $\hat{L}_F(1) = 0$
- $0 \leq \hat{L}_F(p) \leq 1$ para $p \in (0,1)$
- $\hat{L}_F(p)$ es continua, no decreciente y cóncava.

A continuación se presentan algunos ejemplos de la construcción de la función de Lorenz asociadas a diferentes distribuciones de ingresos de una variable aleatoria continua.

Distribución Uniforme

Consideremos una sociedad donde los ingresos siguen una distribución uniforme en un intervalo compacto $[a,b]$ dónde $0 \leq a < b < \infty$, se tiene la función de densidad de probabilidad $f_u(x) = 1/(b-a)$ y la función de distribución $F_u(x) = (x-a)/(b-a)$ para todo $x \in [a,b]$. Recordando que la media μ se define como:

$$\mu = \int_0^1 F^{-1}(q)dq$$

Se puede notar que:

$$F_u^{-1}(q) = a + (b-a)q$$

Por lo que la media es:

$$\mu_u = \int_0^1 (a + (b-a)q)\ \ dq$$

$$= a + (b-a)\int_0^1 q\ \ dq = a + (b-a)\frac{q^2}{2}\bigg|_0^1$$

$$= a + \frac{(b-a)}{2} = \frac{a+b}{2}$$

A partir de esto, es posible construir la curva Lorenz.

$$L_{F_u}(p) = \frac{1}{\mu_u}\int_0^p [a + (b-a)q]dq$$

$$= \frac{2}{(a+b)}\left[\int_0^p adq + \int_0^p (b-a)qdq\right] = \frac{2}{(a+b)}\left[aq + (b-a)\frac{q^2}{2}\right]_0^p$$

$$= p\left[1 - \frac{(b-a)}{(a+b)}(1-p)\right]$$

Notemos que, en particular si $a = 0$, tenemos que:

$$L_{F_u}(p) = p^2$$

Si se grafica este caso en particular, se obtiene la siguiente gráfica.

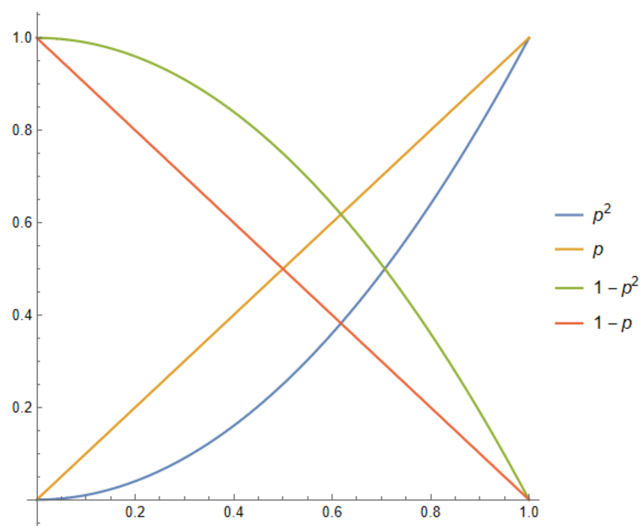


Figura 4.2: Curva de Lorenz para distribución uniforme

Distribución Exponencial

Si ahora se considera una sociedad, en donde la distribución de los ingresos sigue una distribución exponencial, se tiene la función de densidad de probabilidad $f_e(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$ y la función de distribución $F_e(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para cualquier $x \geq 0$. Recordando que la media μ se define como:

$$\mu = \int_0^1 F^{-1}(q)dq$$

Se puede notar que:

$$F_e^{-1}(q) = (1/\lambda)\ln(1-q)$$

Por lo que la media es:

$$\mu_e = \int_0^1 \frac{-1}{\lambda}\ln(1-q)dq = \frac{-1}{\lambda}\left[(1-q)\ln(1-q) - (1-q)\right]_0^1$$

$$= \frac{-1}{\lambda}(-1) = \frac{1}{\lambda}$$

A partir de esto, es posible construir la curva Lorenz.

$$L_{F_e}(p) = \frac{1}{\mu_e}\int_0^p -\ln(1-q)dq$$

Si $t = 1-q$, se tiene:

$$L_{F_e}(p) = -\int_{1-p}^1 \ln(t)dt = -t\ln(t) + t\Big|_{1-p}^1 = p - (1-p)\ln\left(\frac{1}{1-p}\right)$$

Graficando este caso, se obtiene la siguiente gráfica.

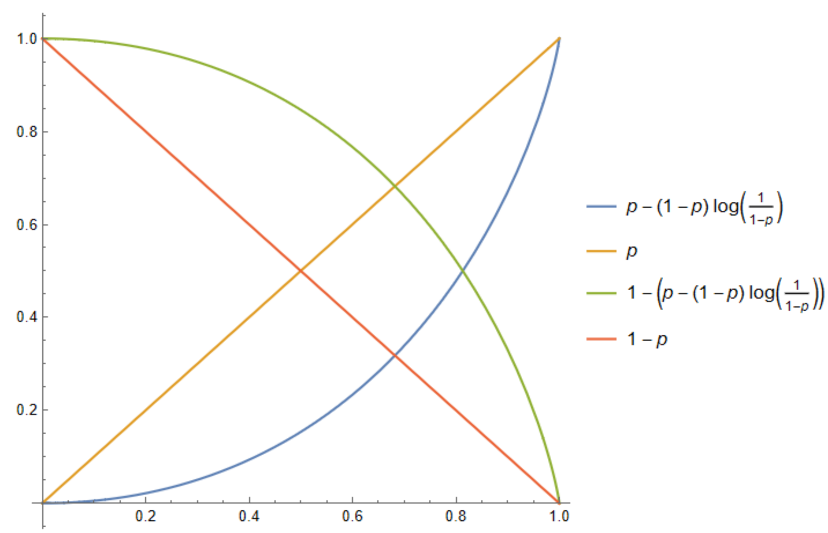


Figura 4.3: Curva de Lorenz para distribución exponencial

Distribución de Pareto

Si se considera una sociedad donde la distribución de los ingresos sigue una distribución de Pareto, donde se tiene la función de densidad $f_{p,\alpha}(x) = \alpha(m)^\alpha/(x)^{\alpha+1}$, y la función de distribución $F_{p,\alpha}(x) = 1 - (m/x)^{\alpha}$ con $m > 0, \alpha > 1$ y ambas definidas para toda $x \geq m$. Recordando que la media μ se define como:

$$\mu = \int_0^1 F^{-1}(q)dq$$

Se puede notar que:

$$F_{p,\alpha}^{-1}(q) = m(1-q)^{-(1/\alpha)}$$

Por lo que la media es:

$$\mu_p = \int_0^1 m(1-q)^{-(1/\alpha)}dq$$

Con $t = 1 - q$

$$\mu_p = -m\int_0^1 -t^{-1/\alpha}dt = m\left(\frac{t^{(-1+\alpha)/\alpha}}{\frac{-1+\alpha}{\alpha}}\right)_0^1 = \frac{\alpha m}{\alpha - 1}$$

Lo que genera la función de Lorenz siguiente:

$$L_{Fp,\alpha}(p) = \frac{\alpha - 1}{m\alpha}\int_0^p m(1-q)^{-1/\alpha}dq$$

Con $t = 1 - q$

$$= \frac{\alpha - 1}{\alpha}\int_{1-p}^1 (t)^{-1/\alpha}dt = t^{(-1+\alpha)/\alpha}\Big|_{1-p}^1 = (1-q)^{(-1+\alpha)/\alpha}\Big|_0^p = 1-(1-p)^{1-(1/\alpha)}$$

Se puede observar la curva de Lorenz para esta distribución en la siguiente gráfica.

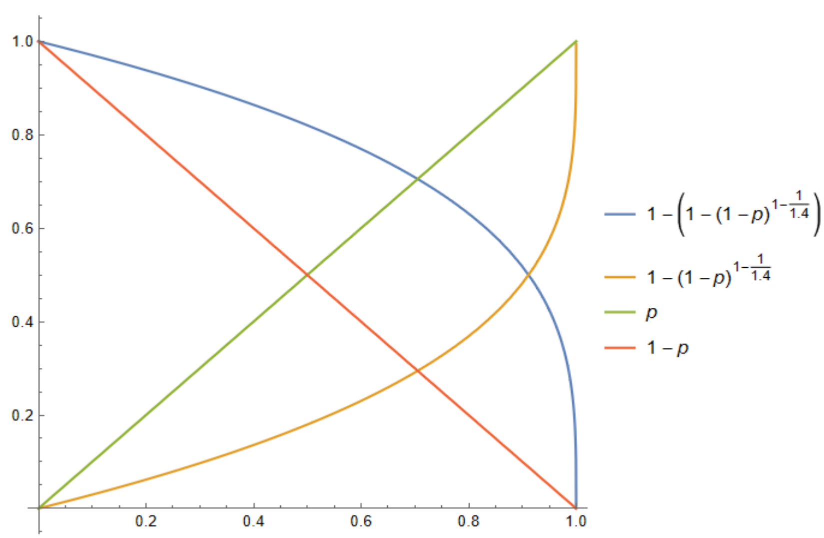


Figura 4.4: Curva de Lorenz para distribución de Pareto, con $\alpha = 1.4$

Por lo tanto, si la distribución de ingresos es una variable aleatoria continua, es posible calcular la función de Lorenz $L_F(p)$, así mismo, la función complementaria $\hat{L}_F(p) = 1 - L_F(p)$.

4.1.2. Midiendo la Desigualdad con la Curva de Lorenz

Notemos que la curva de Lorenz nos permite categorizar las distintas distribuciones de ingreso de acuerdo a la desigualdad que tenga, esto es posible ver de manera gráfica, pues decimos que mientras más cerca la distribución esté de la curva de perfecta igualdad, la sociedad tiene una menor desigualdad. En general, se puede pensar en dos sociedades que dadas sus funciones de distribución F_a, F_b si sucede que $L_{Fa} \leq L_{Fb}$ para toda $p \in [0,1]$, entonces se dice que la sociedad con distribución F_a tiene una mayor desigualdad que la sociedad con distribución F_b, dado que para toda $p \in [0,1]$ la parte inferior $100p\,\%$ de la población tiene un parte porcentual menor de los ingresos bajo F_a que bajo F_b.

4.1.3. Índice Kolkata (Índice-k)

El índice-k, para cualquier función de distribución de ingresos F, se define como la solución a la ecuación $k_F + L_F(k_F) = 1$. Notemos que esta puede ser escrita como $\hat{L}_F(k_F) = k_F$, implicando que el índice-k es punto fijo de la función complementaria de Lorenz. Además, al ser la función complementaria, un mapeo de $[0,1]$ a $[0,1]$, es continua y no creciente, por lo que tiene un único punto fijo. En general, para una función de distribución de los ingresos F, se tiene que $p_F^* = L_F^{-1}(1/2) \geq 1/2$, por lo que el único punto fijo de $\hat{L}_F$ cae en el intervalo $[1/2, p_F^*]$, esto implica que para cualquier distribución F, $k_F \in [1/2, 1)$. Finalmente, se tiene que k_F cae entre el $50\,\%$ de la proporción de población y la proporción de población $p_F^* = L_F^{-1}(1/2)$ a la que se asocia el $50\,\%$ de los ingresos dados por la función de distribución F.

Distribución Uniforme

Si consideramos una función de distribución de ingresos que sigue una distribución uniforme F_u definida en un intervalo $[a,b]$, donde $0 \leq a < b \leq \infty$, se tiene lo siguiente:

$$k_{F_u} = \frac{-(3a+b)\sqrt{5a^2+6ab+5b^2}}{2(b-a)}$$

$$\kappa_{F_u} = \frac{-2(a+b)\sqrt{5a^2+6ab+5b^2}}{(b-a)}$$

Notemos que si $a = 0, b = 1$, se tiene que:

$$k_{F_u} \approx 0.61803 \qquad \kappa_{F_u} \approx 0.23607$$

Donde κ_{F_u} es la normalización del índice-k, es decir, $\kappa_{F_u} = 2k_{F_u} - 1$.

Distribución Exponencial

Si se considera una sociedad con función de distribución de los ingresos que ahora sigue una distribución Exponencial, se tiene que su función complementaria de Lorenz es $\hat{L}_{Fe}(p) = (1-p)[1+\ln(1/(1-p))]$. Por lo que al resolver el sistema:

$$\hat{L}_{Fe}(p) = (1-p)[1+\ln(1/(1-p))] = p$$

Se tiene que:

$$k_{F_e} \approx 0.68216 \qquad \kappa_{F_e} \approx 0.36441$$

Donde κ_{F_e} es la normalización del índice-k, es decir, $\kappa_{F_e} = 2k_{F_e} - 1$.

Distribución de Pareto

Finalmente, para una distribución de los ingresos que sigue una distribución de Pareto, la función complementaria de Lorenz está dada por $\hat{L}_{F_{p,}} = (1-p)^{1-(1/\alpha)}$, por lo que el índice-k se obtiene a partir de la solución a:

$$(1-p)^{1-(1/\alpha)} = k_{F_p} \tag{4.4}$$

En general, la solución a (4.4) es complicada de obtener, pero hay un resultado bien conocido sobre la Ley de Pareto en este caso. Pues si $\hat{\alpha} = \ln(5)/\ln(4) \approx 1.16$ se tiene:

$$k_{F_{\widehat{p,\alpha}}} = 0.8$$

Lo que corresponde con la regla 80/20, además, $\kappa_{F_{\widehat{p,\alpha}}} = 0.6$

Índice-k como Generalización de la Ley de Pareto

El índice-k puede ser pensado como una generalización de la Ley de Pareto, pues se puede notar que $L_F(k_F) = 1 - k_F$, entonces, la parte alta $100(1-k)\,\%$ de la población, tiene $100k_F\,\%$ de los ingresos. Por lo tanto, la razón de Pareto para el índice-k es $k_F/(1-k_F)$. Notemos que en general, la Ley de Pareto no respeta las proporciones 80/20 antes mencionadas.

4.2. Índice Hirsch

Sea $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ el conjunto de artículos de investigación de un científico. Sea $f : X \to \mathcal{N}$ la función de citación, que nos otorga el número de veces que ha sido citado un artículo. Sea $X_{(n)} = (x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(m)})$ un reordenamiento de los elementos de X, tal que, $f(x_{(1)}) \geq \cdots \geq f(x_{(m)})$. El índice de Hirsch, o índice-h, es el número más grande $H^* \in \{0, 1, ..., m\}$ tal que $f(x_{H^*}) \geq H^*$. Notemos que si $f(x_{(1)}) = 0$, entonces $H^* = 0$ y si $f(x_{(m)}) \geq m$, entonces $H^* = m$ y para todos los demás casos $H \in 1, 2, ..., m-1$. Ahora, sino sucede que $f(x_{(1)}) = 0$ o $f(x_{(m)}) \geq m$, entonces, para poder identificar el índice-h, se debe graficar en el eje x el número de publicaciones de un científico ordenados en forma no decreciente, contra el número de citas en cada publicación. Aún más, si se unen los puntos generados como $f(x_{(t)})$ y $f(x_{(t+1)})$ por una línea recta para cada $t \in (1, 2, ..., m)$, entonces se tiene una curva que representa la función $\tilde{f} : [1, m] \to [f(x_{(1)}), f(x_{(m)})]$ que define el dominio $[1, m]$ y el codominio $[f(x_{(1)}), f(x_{(m)})]$, a la cual se le llama curva de citas generadas. Esta curva es continua, lineal a trozos y con pendiente no-negativa, siempre que esta exista. Si consideramos el punto fijo de la curva generada por $\tilde{f}$ en el intervalo $[1, m]$, es decir, se considera $h \in [1, m]$ tal que $\tilde{f}(\tilde{h}) = \tilde{h}$, siempre y cuando haya al menos un artículo citado y siempre que todos los artículos no hayan sido citados más de $(m-1)$ veces, el punto fijo $\tilde{h}$ existe, es único y con la propiedad de que $\tilde{h} \in [1, 2, ..., m-1]$ para identificar H^* basta con verificar lo siguiente.

1. Si el punto fijo $\tilde{h}$ es un entero, se tiene: $\tilde{h} = H^*$
2. Si el punto fijo $\tilde{h}$ no es un entero, entonces, existe un $\hat{h}$, tal que, $\tilde{f}(x_{\hat{h}}) = f(x_{\hat{h}}) > \hat{h}$. Y $\tilde{f}(x_{\widehat{(h+1)}}) = f(x_{(\hat{h+1})}) < \hat{h} + 1$, así, se tiene que $\hat{h} = H^*$

En general, el procedimiento para obtener el índice-h, es el mismo que se sigue para el índice-k, pues ambos son puntos fijos de las distribuciones de ingresos que se siguen en la sociedad.

4.3. Índice de Gini

El índice de Gini es una medida estándar de desigualdad, es decir, cuantifica la desigualdad de los ingresos en una sociedad. Para calcular el índice de Gini, es necesario ajustar la curva de Lorenz en un cuadrado unitario donde la relación del área entre la curva de Lorenz y la línea de perfecta igualdad con el área debajo de esta línea nos da el valor del índice de Gini(g).
Tomando como referencia la figura 4.1, S representa el área entre la curva de Lorenz y la línea de perfecta igualdad, mientras que $(S - \bar{S})$ representa el área debajo de la línea de perfecta igualdad, entonces definimos a $g := \frac{S}{S-\bar{S}}$ que tendrá un rango entre 0 y 1, donde $g = 0$ representa la igualdad perfecta, es decir, todos los individuos tienen la misma cantidad de ingresos o capital. Mientras que $g = 1$ representa la máxima desigualdad posible, donde una sola persona retiene todo el capital posible mientras que el resto de la sociedad se queda con nada.
Dada una distribución de ingresos F, el índice de Gini se obtiene mediante la fórmula:

$$G_F = \frac{\int_0^1 (q - L_F(q))dq}{1/2} = 2\int_0^1 (q - L_F(q))dq = 1 - 2\int_0^1 L_F(q)dq$$

Distribución Uniforme

Si consideramos una sociedad, donde la distribución de los ingresos sigue una distribución uniforme, se tiene que el índice de Gini está dado por:

$$G_{F_u} = 2\int_0^1 \left[q - q\left(1 - \frac{(b-a)}{(a+b)}(1-q)\right)\right] dq = \frac{(b-a)}{3(a+b)} > \kappa_{F_u}$$

Notemos que si $a = 0, b = 1$, se tiene:

$$G_{F_u} = \frac{1}{3} > \kappa_{F_u} \approx 0.23607$$

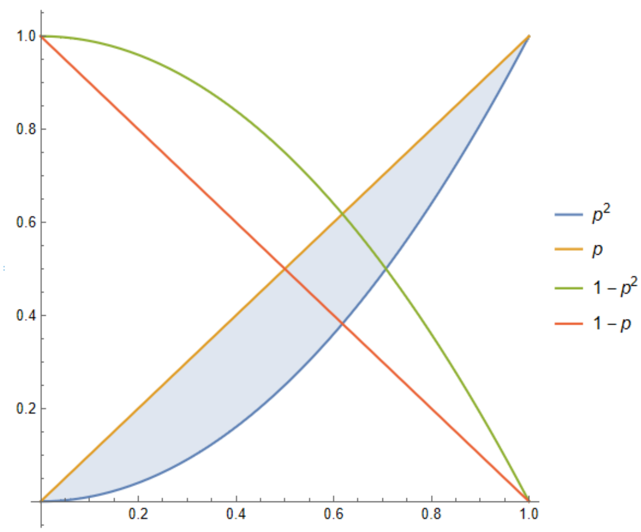


Figura 4.5: Curva de Lorenz para la distribución uniforme, con el área del índice de Gini.

Distribución Exponencial

Si consideramos una sociedad, donde la distribución de los ingresos sigue una distribución exponencial, es decir:

$$F_e(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Para $x \geq 0, \quad \lambda > 0$ el índice de Gini está dado por:

$$G_{F_e} = 2\int_0^1 \left[q - L_{F_e}(q)\right] dq$$

$$= 2\int_0^1 (1-q)\ln\left(\frac{1}{1-q}\right) dq = \frac{1}{2} > \kappa_{F_e} \approx 0.36441$$

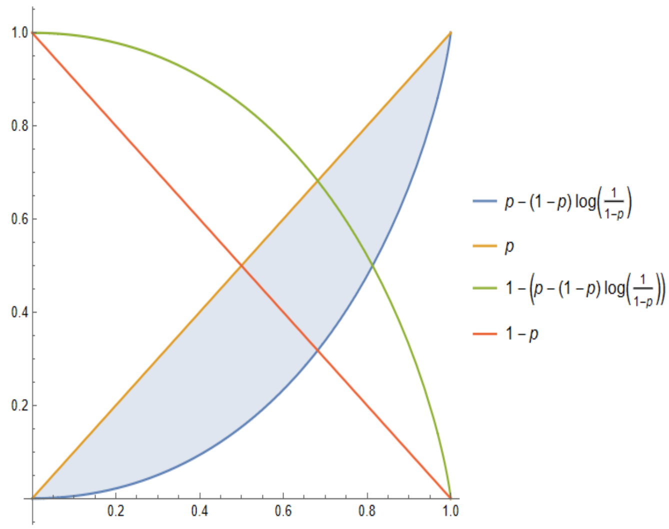


Figura 4.6: Curva de Lorenz para la distribución exponencial, con el área del índice de Gini.

Distribución de Pareto

Si consideramos una sociedad, donde la distribución de los ingresos sigue una distribución de Pareto, es decir:

$$F_{p,\alpha}(x) = 1 - (m/x)^{\alpha}, \qquad m > 0$$

Y considerando un ingreso mínimo $\alpha > 1$. Entonces, el índice de Gini está dado por:

$$G_{F_{p,\alpha}} = 2\int_0^1 \left[q - \left(1 - (1-q)^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)\right] dq = \frac{1}{2\alpha - 1}$$

Es fácil observar que para distinto valores de $\alpha > 1$, si este crece, el índice de Gini decrece cuando $\alpha \to 1$. Y sucede que $G_{F_{p,\alpha}} \to 1$. En particular, si $\alpha = \ln(5)/\ln(4) \approx 1.16$, entonces:

$$G_{F_{p,\alpha}} \approx 0.7565 > \kappa_{F_{p,\alpha}} = 0.6$$

Que es un resultado obtenido anteriormente.

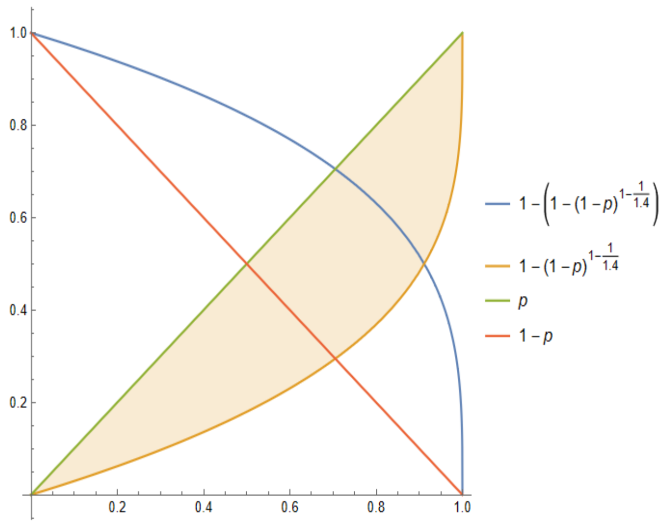


Figura 4.7: Curva de Lorenz para la distribución de Pareto, con el área del índice de Gini.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de los trimestres en los que se ha trabajado el presente proyecto se han incluido las siguientes actividades:

- Revisión de documentos y artículos académicos.
- Participación en el Simposio de Licenciaturas.
- Realización de cartel para Simposio.
- Realización de apuntes como apoyo al proyecto terminal.
- Estudio de temas respecto a conceptos importantes.
- Revisión de código en Mathematica para replicación de los modelos estudiados.
- Exposición del Proyecto Terminal en, "XVII Semana de Matemáticas Aplicadas y Computación", en la unidad Cuajimalpa.
- Realización de una presentación para la "XVII Semana de Matemáticas Aplicadas y Computación".

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Código del Modelo de Intercambio entre Agentes

Se presenta el siguiente código en Mathematica que tiene como fin hacer la simulación de los distintos modelos presentados a lo largo del proyecto, así como de comprender de mejor manera los resultados que llegaran a tener cada uno.

```
Manipulate[Module[{moneyDist = moneyDistHistory[[Round[time]]]},
  Histogram[moneyDist, ImageSize -> 900,
   PlotLabel -> "money distribution",
   AxesLabel -> {"money", "number of agents"},
   PlotRange -> {0, 500}]], {time, 1, 50, 1},
 Initialization :> {
   (* Intercambio de dinero entre dos agentes
   seleccionados de manera aleatoria. *)
   randomExchange[agents_List, dM_Real] :=
    Module[{newAgents = agents,
      a1 = RandomInteger[Length[agents] - 1] + 1,
      a2 = RandomInteger[Length[agents] - 1] + 1, money},
     money = Random[]*dM;
     (*Fracción del dinero a intercambiar.*)

     If[newAgents[[a1]] >= money,
      newAgents[[a1]] -= money;
      newAgents[[a2]] += money;
      ];
     newAgents
     ];
   (* Crea un estado inicial de la economía. *)
```

```
initSimulation[numAgents_Integer, numEconomies_Integer,
  initialMoneyEndowment_Real] :=

 Table[Table[initialMoneyEndowment, {numAgents}], {numEconomies}];
(* Realiza la simulación para un número específico de pasos. *)

runSimulation[economyList_List, dM_Real, time_Integer] :=
 Module[{newEconomyList = economyList},
  Do[newEconomyList =
     Map[(randomExchange[#, dM]) &, newEconomyList];, {time}];
  newEconomyList ];
(* Crea los datos de la simulación. *)

makeData[numAgents_Integer, numEconomies_Integer,
  initialMoneyEndowment_Real, numSamples_Integer,
  stepSize_Integer] :=
 Module[{economyList =
    initSimulation[numAgents, numEconomies, initialMoneyEndowment],
    moneyDistHistory = {}, incomeDistHistory = {}},
  Do[ moneyDistHistory =
    Append[moneyDistHistory, Flatten[economyList]];
   economyList =
    runSimulation[economyList, initialMoneyEndowment,
     stepSize];, {numSamples}];
  {moneyDistHistory}];
{moneyDistHistory} = makeData[25, 20, 100.0, 50, 5]
(* makeData es una función  que recibe Núm de Agentes,
Núm de Economías, Dinero inicial,
Núm de muestras y tamaño de paso. *)
}]
```

Bibliografía

[1] Moran, M. J., Shapiro, H. N., Boettner, D. D., & Bailey, M. B. (2018). Fundamentals of engineering thermodynamics. (8th ed., pp. 39–44, 241–248). John Wiley & Sons, Inc.

[2] Dill, K. A., & Bromberg, S. (2011). Molecular driving forces : statistical thermodynamics in biology, chemistry, physics, and nanoscience (2nd ed., pp. 81–130). Garland Science.

[3] Chakrabarti, B. K., Chakraborti, A., Chakravarty, S. R., & Chatterjee, A. (2013). Econophysics of income and wealth distributions. Cambridge University Press.

[4] Viaggiu, S., Lionetto, A., Bargigli, L., & Longo, M. (2012). Statistical ensembles for money and debt. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 391(20), 4839–4849. https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.05.027

[5] Neñer, J., & Laguna, M. F. (2021). Optimal risk in wealth exchange models: Agent dynamics from a microscopic perspective. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 566(125625). https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.125625

[6] Sinha, A., Mukherjee, S., & Chakrabarti, B. (2020). Econophysics Through Computation. Econophysics through Computation, 3. https://doi.org/10.23977/jptc.2020.31001

[7] Aydiner, E., Cherstvy, A. G., & Metzler, R. (2019). Money distribution in agent-based models with position-exchange dynamics: the Pareto paradigm revisited. The European Physical Journal B, 92(5). https://doi.org/10.1140/epjb/e2019-90674-0

[8] Patriarca, M., Chakraborti, A., & Kaski, K. (2004). Statistical model with a standard Γ distribution. Physical Review E, 70(1). https://doi.org/10.1103/physreve.70.016104

[9] López-Ruiz, R., Sañudo, J., & Calbet, X. (2009). Equiprobability, Entropy, Gamma Distributions and Other Geometrical Questions in Multi-Agent Systems. Entropy, 11(4), 959–971. https://doi.org/10.3390/e11040959

[10] Lim, G., & Min, S. (2020). Analysis of Solidarity Effect for Entropy, Pareto, and Gini Indices on Two-Class Society Using Kinetic Wealth Exchange Model. Entropy, 22(4), 386. https://doi.org/10.3390/e22040386

[11] Dragulescu, A., & Yakovenko, V. M. (2000). Statistical mechanics of money. The European Physical Journal B, 17(4), 723–729. https://doi.org/10.1007/s100510070114

[12] López Ruiz, R., & Lostao, C. (2011). Modelos matemáticos de la riqueza. Investigación y Ciencia, Marzo 2011, 2-7.

[13] Chatterjee, A., & Chakrabarti, B. K. (2007). Kinetic exchange models for income and wealth distributions. The European Physical Journal B, 60(2), 135–149. https://doi.org/10.1140/epjb/e2007-00343-8

[14] Pascoal, R., & Rocha, H. (2017). Inequality measures for wealth distribution: Population vs individuals perspective. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 492, 1317–1326. https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.11.059

[15] Rawlings, P. K., Reguera, D., & Reiss, H. (2004). Entropic basis of the Pareto law. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 343, 643–652. https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.06.152

[16] Chakrabarti AS, Chakrabarti BK. Inequality reversal: Effects of the savings propensity and correlated returns. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2010 Sep;389(17):3572–9.

[17] Wrigth, I. (2011, March 7). Statistical Mechanics of Money - Wolfram Demonstrations Project. Demonstrations.wolfram.com. https://demonstrations.wolfram.com/StatisticalMechanicsOfMoney/