



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA

DIVISIÓN EN CIENCIAS NATURALES E
INGENIERÍA



APLICACIÓN DE MÉTODOS SEMI-ANALÍTICOS EN LA BIOMATEMÁTICA

PREDOCTORAL

PRESENTA:

M. C. ALEJANDRO LEÓN RAMÍREZ

Director: **DR. OSWALDO GONZÁLEZ GAXIOLA**

Codirector: **DR. GUILLERMO CHACÓN ACOSTA**

Asesora: **DRA. DIANA ASSAELY LEÓN VELASCO**

Ciudad de México, México.

Julio, 2022.

Índice general

1. Introducción	2
2. Objetivos e Hipótesis	3
2.1. Objetivo general	3
2.2. Hipótesis	3
3. Métodos semi-analíticos	4
3.1. Método de Adomian	4
3.2. Método de Kudryashov	5
4. Problemas estudiados	7
4.1. La ecuación de Bethe	7
4.2. Modelo SIR con tasas de incidencia no lineales	9
4.3. Ecuación de Schamel-Kawahara	12
4.4. Fototaxia en <i>Synechocystis</i>	14
4.5. Difusión biarmónica en canales estrechos	20
5. Conclusiones y perspectivas	23
Bibliografía	24

Capítulo 1

Introducción

Los organismos han creado diferentes estrategias y estructuras para poder sobrevivir, algunas bacterias poseen la capacidad de detectar la luz y moverse hacia ella con la finalidad de obtener una mayor cantidad de nutrientes, fenómeno conocido como fototaxia. En el proyecto doctoral, se estudia este proceso en la cianobacteria *Synechocystis*, se considera un modelo no lineal de agregación y formación de colonias de bacterias y se resuelve con ayuda de diferentes métodos semi-analíticos.

Además, a lo largo del proyecto se han podido abordar diferentes problemas de interés en el área de la biomatemática que, aunque no son el eje principal del trabajo, salen como problemas secundarios al estudiar los métodos utilizados. Primero, se aborda la ecuación de Bethe, que es una ecuación diferencial no lineal que aparece en la física nuclear y que juega un papel importante en diversas aplicaciones que van desde las ciencias básicas, la ingeniería y la medicina. Para resolverla se utiliza una modificación del método de descomposición de Adomian, al combinarlo con transformada de Laplace (LADM).

Segundo, se estudia la dinámica epidemiológica de un modelo tipo SIR no lineal, donde las tasas de incidencia reflejan el impacto de los medios de comunicación y los efectos psicológicos en la propagación de la enfermedad. Para ello se usa el método de descomposición modificado Rach-Adomian-Meyers (MDM) y el método numérico Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Además, se aplica a datos de propagación de COVID-19 en Italia y China, viendo que en este caso la diferencia entre lo semi-analítico y lo numérico es pequeña.

Tercero, se estudia la ecuación de Schamel-Kawahara, relacionada con la propagación de ondas longitudinales con dispersión de alta frecuencia en un cascarón cilíndrico y se obtienen diferentes soluciones a través del método de Kudryashov.

Finalmente, se analiza el origen de los distintos términos en la ecuación del modelo continuo de fototaxia. En específico se estudia el término de cuarto orden, que considera el promedio de los promedios vecinos más cercanos. Estamos interesados en estudiar este proceso en un canal estrecho, donde los efectos geométricos pueden estudiarse a través de una aproximación unidimensional y así, obtener una ecuación tipo Fick-Jacobs y observar el efecto de estos términos y las fuerzas entrópicas.

Capítulo 2

Objetivos e Hipótesis

2.1. Objetivo general

Estudiar la ecuación del modelo continuo para la fototaxia y encontrar soluciones.

Objetivos específicos

1. Estudiar el método de descomposición de Adomian (ADM) y algunas modificaciones.
2. Estudiar el método de Kudryashov y algunas modificaciones.
3. Estudiar el origen de los distintos términos en la ecuación del modelo continuo de fototaxia.
4. Estudiar un método numérico para resolver la ecuación del modelo continuo de fototaxia.

2.2. Hipótesis

La ecuación del modelo matemático de la fototaxia en *Synechocystis* admite soluciones de tipo onda viajera [1].

Los términos de cuarto orden de la ecuación de difusión de dos dimensiones y de la ecuación del modelo continuo de fototaxia pueden estudiarse a través de una proyección unidimensional, mediante métodos semi-analíticos y/o numéricos, al igual que la ecuación de Fick-Jacobs.

Capítulo 3

Métodos semi-analíticos

3.1. Método de Adomian

El método de Descomposición de Adomian (ADM) es un método semi-analítico que permite encontrar una solución en forma de serie [2]. ADM proporciona una aproximación a una clase muy amplia de ecuaciones diferenciales no lineales (ordinarias, parciales, integro-diferenciales y estocásticas) sin linealización, perturbación o discretización, procesos que pueden resultar en un gran costo de cálculo o computación numérica.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial, ya sea ordinaria o parcial:

$$L_t u(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \quad (3.1)$$

donde $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, R es un operador lineal que involucra derivadas parciales con respecto a x , N es un operador no lineal y g es un término no homogéneo independiente de u . Despejando $L_t u(x, t)$ y aplicando el inverso $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt$ en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$u(x, t) = f(x) + L_t^{-1} g(x, t) - L_t^{-1} Ru(x, t) - L_t^{-1} Nu(x, t), \quad (3.2)$$

donde $f(x)$ es la constante de integración (con respecto a t) que satisface $L_t f = 0$.

El método asume la solución de la Ec. (3.1) en forma de serie

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (3.3)$$

y que el término no lineal $Nu(x, t)$ se descompone como:

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad (3.4)$$

donde la sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ son los polinomios de Adomian [3, 4] y son dados por la fórmula:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} [N(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)]|_{\alpha=0}. \quad (3.5)$$

Otra forma de obtener estos polinomios se aborda en [5, 6].

Sustituyendo las Ecs. (3.3)-(3.5) en la Ec. (3.2) obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = f(x) + L_t^{-1} g(x, t) - L_t^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) - L_t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad (3.6)$$

de donde se adquiere el algoritmo recursivo:

$$\begin{cases} u_0(x, t) = f(x) + L_t^{-1} g(x, t), \\ u_{n+1}(x, t) = L_t^{-1} R u_n(x, t) - L_t^{-1} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.7)$$

Con este algoritmo podemos tener una aproximación a la solución de (3.1), por medio de la serie

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k u_n(x, t), \quad (3.8)$$

donde $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t) = u(x, t)$.

Desde la aparición de ADM, el método ha tenido varias mejoras. Una de ellas es la combinación con transformada de Laplace \mathcal{L} , mejora conocida como método de Adomian-Laplace (LADM) [7, 8]. De forma general se siguen los siguientes pasos: aplicar la transformada de Laplace \mathcal{L} a la ecuación estudiada, resolver con ADM y posteriormente aplicar la transformada inversa \mathcal{L}^{-1} para recuperar la variable original.

Otra mejora es el método de descomposición modificado Rach-Adomian-Meyers (MDM) [9–11] que consiste en dividir todo el dominio en subintervalos, de forma que $u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$. En este método se obtiene la solución para el primer subintervalo, los últimos valores se usan como condiciones iniciales del siguiente subintervalo para obtener la solución y así sucesivamente.

3.2. Método de Kudryashov

El método Kudryashov, originalmente expuesto en [12], proporciona un algoritmo muy útil para encontrar soluciones de ecuaciones no lineales. A continuación se explicará brevemente el método. Consideramos la PDE no lineal general dada por

$$G(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (3.9)$$

Usando el cambio de variable de onda viajera $u(x, t) = u(\xi)$ con $\xi = x - \omega t$, la Ec. (3.9) se convierte en la siguiente ODE:

$$F(u, -\omega u_\xi, u_\xi, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0. \quad (3.10)$$

Posteriormente se siguen los siguientes pasos [13]:

Paso 1. Se supone que la solución exacta de la Ec. (3.10) tiene la forma:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i Q^i(\xi), \quad (3.11)$$

donde los a_i son constantes que se determinarán algebraicamente con $a_N \neq 0$. Mientras que la función Q es una solución de la ecuación diferencial de Ricatti

$$\frac{dQ}{d\xi} = Q^2 - Q, \quad (3.12)$$

por lo tanto,

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + e^\xi}. \quad (3.13)$$

Paso 2. El número entero positivo N en la Ec. (3.11) se obtiene balanceando el término no lineal y la derivada de mayor orden.

Paso 3. Considerando $u(\xi)$ en la Ec. (3.11) y sus derivadas $u_\xi, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \dots$, y sustituyéndolas en la Ec. (3.10) se obtiene la ecuación polinomial:

$$P[Q(\xi)] = 0. \quad (3.14)$$

Paso 4: Seleccionamos, de la ecuación polinomial (3.14), los términos que tienen la misma potencia algebraica de Q , los igualamos a cero y obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas con el conjunto de incógnitas $\{a_0, \dots, a_N, \omega\}$. Podemos usar algún software de cálculo, como *Mathematica*, para resolver el sistema con las restricciones naturales del modelo y considerando que $a_N \neq 0$.

Paso 5: Con los resultados obtenidos en el paso anterior y considerando las Ecs. (3.13) y (3.11) obtenemos las soluciones exactas a la Ec. (3.10) y por ende a la Ec. (3.9).

Al igual que el método de Adomian, este método ha tenido diversas mejoras. Una de ellas es el método generalizado de Kudryashov [14], que sigue los mismo pasos que el método original a diferencia de que, en el paso 1, propone la solución de la siguiente forma:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Q^i(\xi)}{\sum_{j=0}^M b_j Q^j(\xi)}. \quad (3.15)$$

Capítulo 4

Problemas estudiados

4.1. La ecuación de Bethe

Cuando un haz de electrones incide sobre una superficie sufre una pérdida de energía, debido a sus interacciones con ella, lo que resulta en una desaceleración de su movimiento. El llamado poder de frenado determina precisamente esta pérdida de energía de electrones y se determina mediante la conocida ecuación relativista de Bethe [15]. A pesar de su importancia en varios modelos físicos y que se derivó hace más de ochenta años todavía no existe, hasta donde sabemos, solución exacta de esta ecuación no lineal, cuya forma es:

$$-\frac{dE}{dX} = \frac{nz^2e^4}{4\pi\epsilon_o^2mc^2\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2mc^2\beta^2}{I(1-\beta^2)} \right) - \beta^2 \right], \quad (4.1)$$

donde n es la densidad electrónica, ze es la carga total del electrón, ϵ_o es la permitividad en el vacío, m es la masa del electrón, c es la velocidad de la luz en el vacío, $\beta = v/c$ es la fracción de la velocidad de la luz, y I la energía de excitación promedio [16, 17]. Siguiendo el estudio realizado en [17, 18], la ecuación (4.1) puede reescribirse como:

$$\frac{du}{dx} + \frac{\ln(u+1)}{u} = 0, \quad u(0) = u_0. \quad (4.2)$$

Aquí u es una medida adimensional de la energía cinética con $u \geq 1$, y x es una medida adimensional de la distancia recorrida por la partícula en el medio [19]. El valor $x = 0$ corresponde a la posición de la superficie del material donde la partícula tiene su energía inicial $u(0) = u_0$.

Aplicando la transformada de Laplace \mathcal{L} a la Ec. (4.2), se tiene:

$$u(s) = \frac{u_0}{s} - \frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ \frac{\ln(u+1)}{u} \right\}. \quad (4.3)$$

Aplicando el método LADM, la Ec. (4.3) se reescribe como

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0 - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \right\} \right], \quad (4.4)$$

de donde se deduce la siguiente fórmula recursiva:

$$\begin{cases} u_0(x) = u_0, \\ u_{n+1}(x) = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.5)$$

donde los A_n corresponden a los polinomios de Adomian.

Ejemplos: Utilizando las expresiones obtenidas anteriormente, se realizaron algunas simulaciones tomando diferentes valores de energía cinética u_0 como valor inicial (Figura 4.1) . Posteriormente calculamos y comparamos el rango R , cuando la energía cinética decae a cero. En la Tabla 4.1 podemos observar que nuestra aproximación a la ecuación de Bethe es muy precisa, con un error máximo de 0.015 %.

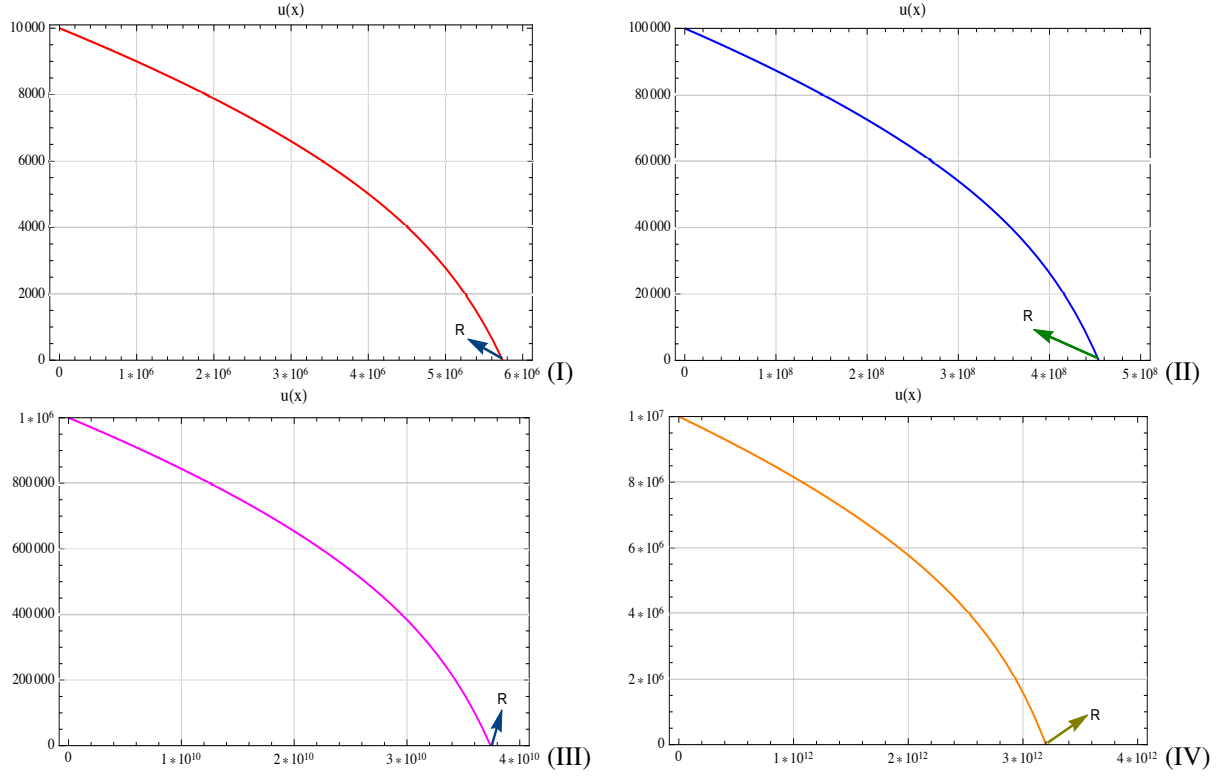


Figura 4.1: Aproximación de $u(x)$ con 8 términos obtenida por LADM para (I) $u_0 = 1 \times 10^4$ (II) $u_0 = 1 \times 10^5$ (III) $u_0 = 1 \times 10^6$ (IV) $u_0 = 1 \times 10^7$

Ejemplo	u_0	R obtenido por LADM	R_{ex}	$E = \frac{ R-R_{ex} }{R_{ex}} \times 100$
I	1×10^4	5741211.4	5740303.8	0.015 %
II	1×10^5	4.5401472×10^8	4.5401197×10^8	0.0006 %
III	1×10^6	3.7550206×10^{10}	3.7550194×10^{10}	0.00003 %
IV	1×10^7	3.2014147×10^{12}	3.2014146×10^{12}	0.000002 %

Tabla 4.1: Comparación del rango R obtenido por el método LADM, con el valor exacto.

Observemos de la tabla que la solución por el método LADM a ocho términos es muy precisa, con un error máximo de 0.015 %. La aproximación de la ecuación de Bethe fue exitosa y nuestros resultados se pueden ver en [20].

4.2. Modelo SIR con tasas de incidencia no lineales

La transmisión de una enfermedad contagiosa depende de diversos factores como: las características del virus, el clima, las medidas de higiene, entre otras. Es necesario conocer la dinámica de la enfermedad para implementar estrategias y políticas públicas que ayuden a controlar y eventualmente mitigar epidemias. Entre los modelos matemáticos más utilizados se encuentra el modelo SIR [21] que además de su efectividad es posible realizar modificaciones y generalizaciones para simular la dinámica de forma específica para dicha enfermedad.

El modelo SIR estudiado divide a la población en tres grupos o compartimentos: susceptibles (S), infectados (I) y recuperados (R), cuya dinámica se rige por un sistema de ecuaciones diferenciales [21, 22]. En este estudio optamos por trabajar con el modelo SIR con términos no lineales que reflejan el impacto de los medios y los efectos psicológicos en la propagación de la epidemia.

El modelo propuesto es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S + \delta R - f(S, I), \\ \frac{dI}{dt} = f(S, I) - (\mu + \gamma + \alpha)I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu + \delta)R, \end{cases} \quad (4.6)$$

con condiciones iniciales

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0. \quad (4.7)$$

Donde S es el número de individuos susceptibles al tiempo t , I es el número de individuos infectados, R son los individuos recuperados, Λ la tasa de natalidad, μ la tasa de muerte natural, γ la tasa de recuperación, α es la muerte por enfermedad, δ la pérdida de inmunidad y $f(S, I)$ la tasa de incidencia.

Se sabe que la función de tasa de incidencia $f(S, I)$, que modela la transferencia de susceptibles a infectados, juega un papel importante en el modelo tipo SIR, aquí estudiado [23, 24]. En casos de contagios graves, como la epidemia provocada por el coronavirus COVID-19, el comportamiento de la población cambia y la tasa de incidencia disminuye como consecuencia de un factor psicológico colectivo inducido por la información

publicada en los medios de comunicación; así como por la cuarentena, las medidas de protección y el distanciamiento social.

En este trabajo se utiliza una tasa de incidencia que toma en cuenta el factor psicológico [23]:

$$f(S, I) = \frac{\beta IS}{1 + \omega I^2}, \quad (4.8)$$

y otra que modula el efecto de los medios de comunicación [24]:

$$f(S, I) = \frac{\beta SI}{\kappa e^{\theta I}}. \quad (4.9)$$

El método MDM descompone *a priori* $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ como una serie de potencia, esto es:

$$S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m, \quad I(t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m, \quad R(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m. \quad (4.10)$$

La parte no lineal $f(S, I)$ se descompone en los polinomios de Adomian de dos variables y se calculan de la siguiente manera [5]:

$$\begin{cases} A_0 = f(a_0, b_0), \\ A_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left[(k+1) a_{k+1} \frac{\partial}{\partial a_0} A_{m-1-k} + (k+1) b_{k+1} \frac{\partial}{\partial b_0} A_{m-1-k} \right], \quad m \geq 1. \end{cases} \quad (4.11)$$

Sustituyendo las Ecs. (4.10) y (4.11) en la Ec. (4.6), obtenemos el siguiente algoritmo recursivo:

$$\text{Para cada } a_m : \begin{cases} a_0 = S_0, & a_1 = \Lambda - \mu a_0 + \delta c_0 - A_0 \\ a_{m+1} = \frac{1}{m+1} (-\mu a_m + \delta c_m - A_m), & m \geq 1. \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{Para cada } b_m : \begin{cases} b_0 = I_0, & b_1 = A_0 - (\mu + \gamma + \alpha) b_0 \\ b_{m+1} = \frac{1}{m+1} (A_m - (\mu + \gamma + \alpha) b_m), & m \geq 1. \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\text{Para cada } c_m : \begin{cases} c_0 = R_0, & c_1 = \gamma b_0 - (\mu + \delta) c_0 \\ c_{m+1} = \frac{1}{m+1} (\gamma b_m - (\mu + \delta) c_m), & m \geq 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Ejemplo: Para este caso utilizamos la transmisión de COVID-19, causada por el coronavirus SARS-CoV2, en Italia del 07 de Marzo al 04 de Abril del 2020. Los parámetros utilizados se pueden observar en la Tabla 4.2.

Los coeficientes pertenecientes a las tasas de incidencia se calcularon haciendo un ajuste por métodos estadísticos y son: $\beta = 3.509566 \times 10^{-9} (\text{ind.} \times \text{día})^{-1}$, $\omega = 3.412244 \times 10^{-10} \text{ind.}^{-2}$, $\kappa = 0.847116$, $\theta = 1.613838 \times 10^{-5} \text{ind.}^{-1}$.

En la Figura 4.2 se muestran los datos recolectados cada día por el Ministero della Salute [25], la aproximación obtenida por el método MDM considerando ϕ_{12} términos y la solución numérica por el método Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Esto con la finalidad de mostrar la eficacia y precisión del método.

Parámetros	
a_0 [ind.]	60311350
b_0 [ind.]	5061
c_0 [ind.]	589
Λ [ind./día]	1204.79
μ [día ⁻¹]	2.88885×10^{-5}
γ [día ⁻¹]	1.728462×10^{-02}
α [día ⁻¹]	0.015507591
δ [día ⁻¹]	1×10^{-7}

Tabla 4.2: Datos obtenidos del Ministero della Salute [25] y del Instituto Nazionale di Statistica [26]

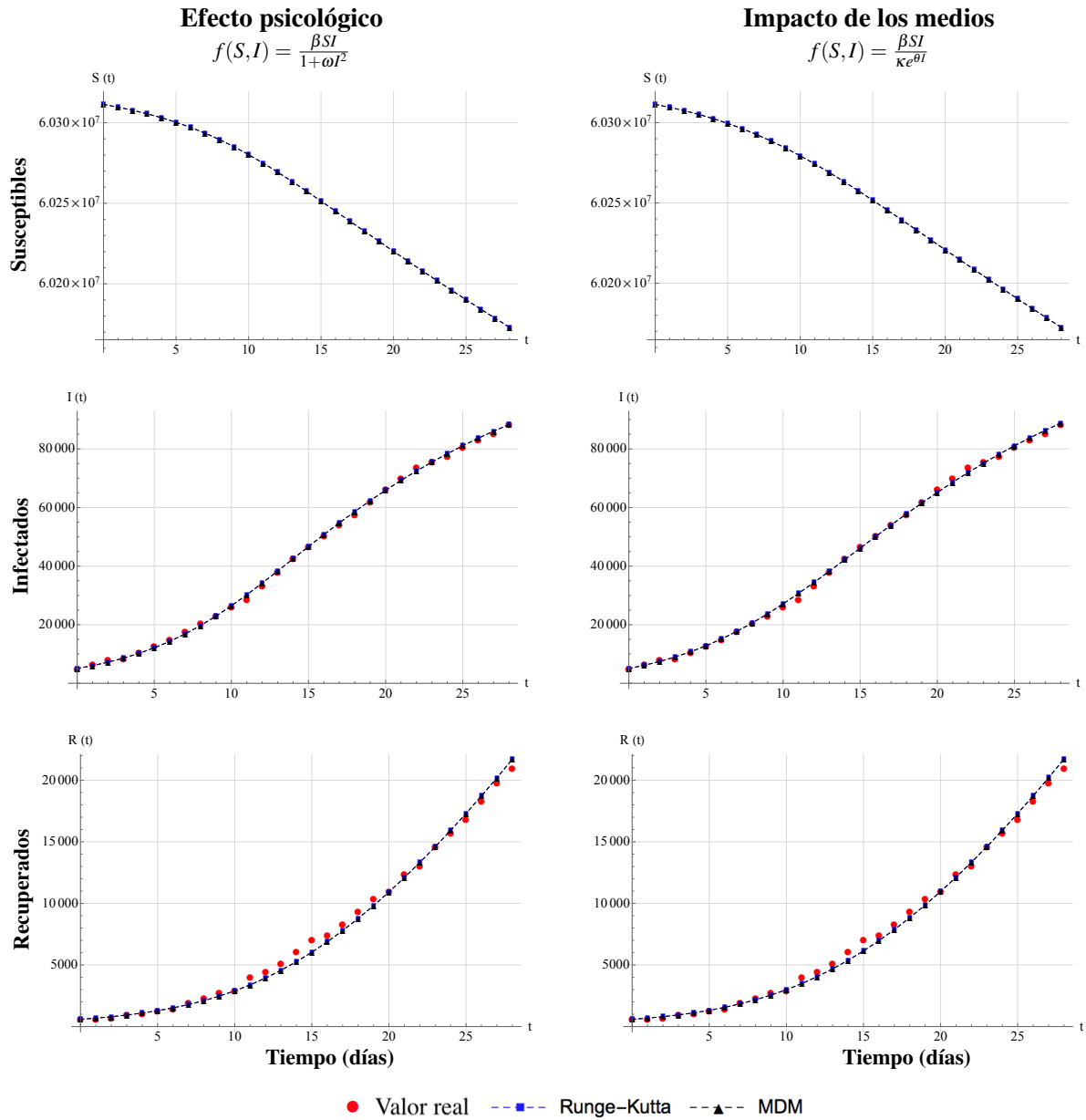


Figura 4.2: Transmisión de COVID-19, causada por el coronavirus SARS-CoV2, en Italia del 07 de Marzo al 04 de Abril del 2020.

La predicción realizada por el método MDM describe muy bien la dinámica epidemiológica causada por el coronavirus SARS-CoV2, dando la posibilidad de utilizar este método para resolver la propagación de otras enfermedades e incluso en modelos más complejos al tipo SIR. Este trabajo fue recientemente sometido para su publicación en [27]. Donde se explica más detalladamente el desarrollo del método y se abordan otros ejemplos.

4.3. Ecuación de Schamel-Kawahara

Se han propuesto varios modelos matemáticos no lineales para estudiar ondas y oscilaciones, especialmente su propagación en barras y cascarones cilíndricos. Estos modelos tienen diversas aplicaciones tecnológicas como en el modelado de aviones, cohetes, diseño de gasoductos y oleoductos, entre otras [28–30]. La ecuación de Schamel-Kawahara, Ec. (4.15), describe la propagación de ondas longitudinales, con dispersión de alta frecuencia, en un cascarón cilíndrico y hasta donde sabemos, este nuevo problema solo ha sido estudiado en [31]. Aunque la ecuación no es propiamente del área de las biomatemáticas, se abordó el modelo matemático como un preámbulo para resolver la ecuación de la fototaxia.

$$u_t + c_1 \sqrt{uu_x} + c_2 u_{xxx} - c_3 u_{xxxxx} + c_4 uu_x = 0. \quad (4.15)$$

Después de realizar el cambio de variable de onda viajera $\xi = x - \omega t$, integrar con respecto a ξ y haciendo $u = \phi(\xi)^2$, la Ec. (4.15) se reescribe como:

$$-\Omega \phi^2 + \frac{1}{3} \alpha \phi^3 + \frac{1}{4} \gamma \phi^4 + \beta (\phi_\xi)^2 + \beta \phi \phi_{\xi\xi} - 3(\phi_{\xi\xi})^2 - 4\phi_\xi \phi_{\xi\xi\xi} - \phi \phi_{\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (4.16)$$

donde $\alpha = \frac{c_1}{c_3}$, $\beta = \frac{c_2}{c_3}$ y $\gamma = \frac{c_4}{c_3}$.

Utilizando el método de Kudryashov vemos que en el presente caso $N = 2$. Por lo tanto:

$$\phi(\xi) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2. \quad (4.17)$$

Usando las derivadas de ϕ y sustituyendo en la Ec. (4.16) obtenemos:

$$\begin{aligned} & Q^8 \left(\frac{a_2^4 \gamma}{4} - 420a_2^2 \right) + Q^7 (a_1 a_2^3 \gamma + 1320a_2^2 - 360a_1 a_2) \\ & + Q^6 \left(\frac{\alpha a_2^3}{3} + 10a_2^2 \beta + a_0 a_2^3 \gamma + \frac{3}{2} a_1^2 a_2^2 \gamma - 1510a_2^2 - 120a_0 a_2 + 1080a_1 a_2 - 60a_1^2 \right) \\ & + Q^5 (\alpha a_2^2 a_1 + 12a_2 a_1 \beta - 18a_2^2 \beta + a_2 a_1^3 \gamma + 3a_0 a_2^2 a_1 \gamma + 168a_1^2 - 24a_0 a_1 \\ & - 1164a_2 a_1 + 738a_2^2 + 336a_0 a_2) + Q^4 (\alpha a_2 a_1^2 + \alpha a_0 a_2^2 + 3a_1^2 \beta - 21a_2 a_1 \beta + 8a_2^2 \beta + 6a_0 a_2 \beta \\ & + \frac{a_1^4 \gamma}{4} + 3a_0 a_2 a_1^2 \gamma + \frac{3}{2} a_0^2 a_2^2 \gamma - a_2^2 \Omega - 165a_1^2 + 60a_0 a_1 + 525a_2 a_1 - 128a_2^2 - 330a_0 a_2) \\ & + Q^3 \left(\frac{\alpha a_1^3}{3} + 2\alpha a_0 a_2 a_1 - 5a_1^2 \beta + 2a_0 a_1 \beta + 9a_2 a_1 \beta - 10a_0 a_2 \beta + a_0 a_1^3 \gamma + 3a_0^2 a_2 a_1 \gamma - 2a_2 a_1 \Omega \right. \\ & \left. + 65a_1^2 - 50a_0 a_1 - 81a_2 a_1 + 130a_0 a_2 \right) + Q^2 (\alpha a_2 a_0^2 + \alpha a_1^2 a_0 - 3a_1 a_0 \beta + 4a_2 a_0 \beta + 2a_1^2 \beta + a_2 a_0^3 \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2}a_1^2a_0^2\gamma - 2a_2a_0\Omega - a_1^2\Omega + 15a_1a_0 - 16a_2a_0 - 8a_1^2) + Q(\alpha a_1a_0^2 + a_1a_0\beta + a_1a_0^3\gamma - 2a_1a_0\Omega - a_0a_1) \\
& + \frac{\alpha a_0^3}{3} + \frac{a_0^4\gamma}{4} - a_0^2\Omega = 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Considerando los coeficientes con el mismo exponente de Q e igualándolos a cero se obtiene un sistema de nueve ecuaciones, con las variables desconocidas $\{a_0, a_1, a_2, \Omega\}$. Resolviendo, con la restricción del método $a_2 \neq 0$, se encuentran las siguientes familias de resultados:

Familia 1: Con $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15\gamma}{7}}(\beta - 13)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 13$ y $\gamma > 0$:

$$a_0 = \frac{\sqrt{105\gamma}(\beta - 13) - 14\alpha}{39\gamma}, \quad a_1 = 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad a_2 = -4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad \Omega = 2(\beta - 4).$$

Usando la Ec. (4.17), obtenemos la siguiente solución de onda viajera de la Ec. (4.16):

$$\phi_1(\xi) = \frac{\sqrt{105\gamma}(\beta - 13) - 14\alpha}{39\gamma} + 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}\left(\frac{1}{1+e^\xi}\right) - 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}\left(\frac{1}{1+e^\xi}\right)^2 \tag{4.19}$$

Familia 2: Con $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15\gamma}{7}}(\beta - 13)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 13$ y $\gamma > 0$:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad a_2 = -4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad \Omega = 2(\beta - 4).$$

Usando la Ec. (4.17), obtenemos la siguiente solución de onda viajera de la Ec. (4.16):

$$\phi_2(\xi) = 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}\left(\frac{1}{1+e^\xi}\right) - 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}\left(\frac{1}{1+e^\xi}\right)^2 \tag{4.20}$$

Familia 3: Con $\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15\gamma}{7}}(\beta - 13)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 13$ y $\gamma > 0$:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad a_2 = 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad \Omega = 2(\beta - 4).$$

Usando la Ec. (4.17), obtenemos la siguiente solución de onda viajera de la Ec. (4.16):

$$\phi_3(\xi) = -4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}\left(\frac{1}{1+e^\xi}\right) + 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}\left(\frac{1}{1+e^\xi}\right)^2 \tag{4.21}$$

Familia 4: Con $\alpha = \alpha$, $\beta = \frac{1}{15} \left[195 + 2\alpha \sqrt{\frac{105}{\gamma}} \right]$ y $\gamma > 0$:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad a_2 = -4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad \Omega = 7\beta - 73 - \frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{105}{\gamma}}.$$

Usando la Ec. (4.17), obtenemos la siguiente solución de onda viajera de la Ec. (4.16):

$$\phi_4(\xi) = 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}} \left(\frac{1}{1+e^\xi} \right) - 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}} \left(\frac{1}{1+e^\xi} \right)^2 \quad (4.22)$$

Familia 5: Con $\alpha = \alpha$, $\beta = \frac{1}{15} \left[195 - 2\alpha \sqrt{\frac{105}{\gamma}} \right]$ y $\gamma > 0$:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad a_2 = 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad \Omega = 7\beta - 73 + \frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{105}{\gamma}}.$$

Usando la Ec. (4.17), obtenemos la siguiente solución de onda viajera de la Ec. (4.16):

$$\phi_5(\xi) = -4\sqrt{\frac{105}{\gamma}} \left(\frac{1}{1+e^\xi} \right) + 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}} \left(\frac{1}{1+e^\xi} \right)^2 \quad (4.23)$$

Familia 6: Con $\gamma \neq 0$ y $\beta = 13$:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad a_2 = 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}}, \quad \Omega = 18.$$

Usando la Ec. (4.17), obtenemos la siguiente solución de onda viajera de la Ec. (4.16):

$$\phi_6(\xi) = -4\sqrt{\frac{105}{\gamma}} \left(\frac{1}{1+e^\xi} \right) + 4\sqrt{\frac{105}{\gamma}} \left(\frac{1}{1+e^\xi} \right)^2 \quad (4.24)$$

Este trabajo fue recientemente aceptado en la revista Russian Journal of Nonlinear Dynamics [32], donde se explica más detalladamente el método, así como unas representaciones gráficas de las soluciones expuestas anteriormente.

4.4. Fototaxia en *Synechocystis*

Los organismos biológicos han creado diferentes estructuras y sistemas con el fin de adaptarse al medio en el que se desenvuelven y de este modo, asegurar su supervivencia. La cianobacteria *Synechocystis* desarrolló fotoreceptores con la capacidad de detectar luz en el entorno para posteriormente moverse hacia ella con ayuda de pilis, fenómeno conocido como fototaxia [33].

Se ha visto que la fototaxia en esta bacteria es resultado de un fenómeno grupal, en el que primero se forman agregados de grupos de bacterias y posteriormente inician el movimiento hacia la luz [34], haciendo que la

difusión sea de tipo no lineal. Galante y Levy proponen un modelo en una dimensión [35] en donde puede ocurrir lo siguiente:

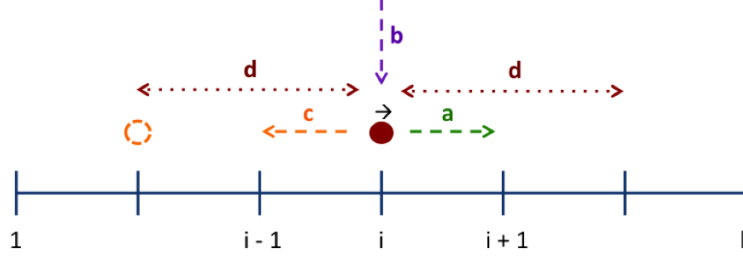


Figura 4.3: Modelo en 1-D.

1. Que las bacterias mantengan su movimiento, es decir no cambian su dirección. Esto ocurre con una probabilidad a .
2. Las bacterias pueden empezar o detener su movimiento. Para este caso la probabilidad sera de b .
3. Finalmente, las bacterias pueden cambiar de dirección debido a la atracción que sienten por sus vecinos en un radio de detección d . Esto ocurre con probabilidad $c = (1 - a - b)/N_n$ donde N_n es el número de vecinos dentro de ese radio de detección.

Chavy-Waddy y Kolokolnikov obtienen una EDP no lineal en [36] que describe este modelo, la cual es dada por

$$u_t = -u_{xx} - u_{xxx} + \alpha \left(\frac{u_x u_{xx}}{u} \right)_x = -u_{xx} - u_{xxx} + \alpha \left(\frac{u u_{xx}^2 - u_x^2 u_{xx} + u u_x u_{xxx}}{u^2} \right)_x, \quad (4.25)$$

donde α está relacionado con los parámetros del modelo y con el umbral para la formación de agregados mediante

$$\alpha := \frac{c(2d+1)(d+1)^2}{(c[1+d(d^2+2d+3)]-2a)}. \quad (4.26)$$

En [36] se estudia el caso estacionario de (4.25) y se obtienen los perfiles de agregación o la formación de patrones para este caso:

$$u(x) = C \left[\operatorname{sech} \left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{2} x \right) \right]^{\frac{2}{\alpha-1}}. \quad (4.27)$$

Además en [36], obtienen otra solución que aunque no tiene sentido físico resuelve la Ec. (4.25)

$$u(x) = C \cosh((\alpha-1)^{-1/2} x). \quad (4.28)$$

Otra solución estacionaria se puede obtener resolviendo directamente en *Mathematica*, con $\alpha = 0$:

$$u(x) = \beta + \gamma x - \omega \cos(x) - \kappa \sin(x), \quad (4.29)$$

donde las constantes β, γ, ω y κ son números reales arbitrarios. Cabe destacar que las Ecs. (4.27)-(4.29) son estacionarias y no describen el modelo completo de fototaxia.

Solución por el método generalizado de Kudryashov

Retomando la Ec. (4.25) y realizando los cambios de variable $z = x - \omega t$, $u(x, t) = e^{v(z)}$ y $v(z) = \int \phi(z) dz$, obtenemos:

$$(\alpha - 1)y^4 + (4\alpha - 6)y^2y_z - y^2 + \omega y + (\alpha - 3)y_z^2 - y_z + (\alpha - 4)yy_{zz} - y_{zzz} = 0 \quad (4.30)$$

Utilizando el método generalizado de Kudryashov vemos que en el presente caso $N = 2$ y $M = 1$. Por lo tanto:

$$y = \frac{a_2 Q(z)^2 + a_1 Q(z) + a_0}{b_1 Q(z) + b_0}, \quad (4.31)$$

siendo las derivadas de Q :

$$\begin{aligned} Q_z &= Q(z)^2 - Q(z) \\ Q_{zz} &= 2Q(z)^3 - 3Q(z)^2 + Q(z) \\ Q_{zzz} &= 6Q(z)^4 - 12Q(z)^3 + 7Q(z)^2 - Q(z). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sustituyendo la Ec. (4.31), sus derivadas y la Ec. (4.32) en la Ec. (4.30) se obtiene, después de juntar los coeficientes con el mismo exponente de Q e igualándolos a cero, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Q^0 : \quad & \alpha a_0^4 + a_0 b_0^3 \omega - a_0^2 b_0^2 - a_0^4 = 0 \\ Q^1 : \quad & 4\alpha a_1 a_0^3 + 4\alpha a_0^3 b_1 - 4\alpha a_1 a_0^2 b_0 - \alpha a_0^2 b_0 b_1 + \alpha a_1 a_0 b_0^2 + 3a_0 b_0^2 b_1 \omega + a_1 b_0^3 \omega - 6a_0^3 b_1 \\ & + 6a_1 a_0^2 b_0 + 2a_0^2 b_0 b_1 - 6a_1 a_0 b_0^2 - 2a_0 b_0^2 b_1 + 2a_1 b_0^3 - 4a_1 a_0^3 = 0 \\ Q^2 : \quad & 4\alpha a_2 a_0^3 + 6\alpha a_1^2 a_0^2 - 4\alpha a_0^3 b_1 + 2\alpha a_0^2 b_1^2 + 4\alpha a_1 a_0^2 b_0 - 8\alpha a_2 a_0^2 b_0 + 8\alpha a_1 a_0^2 b_1 + 3\alpha a_0^2 b_0 b_1 \\ & - 3\alpha a_1 a_0 b_0^2 + 4\alpha a_2 a_0 b_0^2 - 8\alpha a_1^2 a_0 b_0 - 4\alpha a_1 a_0 b_0 b_1 + 2\alpha a_1^2 b_0^2 + 3a_0 b_0 b_1^2 \omega \\ & + a_2 b_0^3 \omega + 3a_1 b_0^2 b_1 \omega + 6a_0^3 b_1 - 8a_0^2 b_1^2 - 6a_1 a_0^2 b_0 + 12a_2 a_0^2 b_0 - 12a_1 a_0^2 b_1 \\ & - 12a_0^2 b_0 b_1 + 12a_1 a_0 b_0^2 - 18a_2 a_0 b_0^2 + 2a_0 b_0 b_1^2 + 12a_1^2 a_0 b_0 + 8a_0 b_0^2 b_1 \\ & + 10a_1 a_0 b_0 b_1 - 8a_1 b_0^3 + 10a_2 b_0^3 - 8a_1^2 b_0^2 - 2a_1 b_0^2 b_1 - 4a_2 a_0^3 - 6a_1^2 a_0^2 = 0 \\ Q^3 : \quad & 4\alpha a_0 a_1^3 + 12\alpha a_0^2 a_2 a_1 - 4\alpha a_1^3 b_0 - 5\alpha a_1^2 b_0^2 + 8\alpha a_0 a_1^2 b_0 + 4\alpha a_0 a_1^2 b_1 - \alpha a_1^2 b_0 b_1 \\ & + 2\alpha a_0 a_1 b_0^2 + 9\alpha a_2 a_1 b_0^2 + \alpha a_0 a_1 b_1^2 - 24\alpha a_0 a_2 a_1 b_0 - 8\alpha a_0^2 a_1 b_1 + 8\alpha a_0 a_1 b_0 b_1 \\ & - 10\alpha a_0 a_2 b_0^2 - 3\alpha a_0^2 b_1^2 + 8\alpha a_0^2 a_2 b_0 + 4\alpha a_0^2 a_2 b_1 - 2\alpha a_0^2 b_0 b_1 - 2\alpha a_0 a_2 b_0 b_1 \\ & + 3a_1 b_0 b_1^2 \omega + a_0 b_1^3 \omega + 3a_2 b_0^2 b_1 \omega + 6a_1^3 b_0 + 18a_1^2 b_0^2 - 12a_0 a_1^2 b_0 - 6a_0 a_1^2 b_1 \\ & + 2a_1^2 b_0 b_1 + 12a_1 b_0^3 - 8a_0 a_1 b_0^2 - 34a_2 a_1 b_0^2 - 6a_0 a_1 b_1^2 + 2a_1 b_0 b_1^2 + 36a_0 a_2 a_1 b_0 \\ & + 12a_0^2 a_1 b_1 + 8a_1 b_0^2 b_1 - 28a_0 a_1 b_0 b_1 - 40a_2 b_0^3 - 2a_0 b_1^3 + 40a_0 a_2 b_0^2 + 10a_0^2 b_1^2 - 8a_0 b_0 b_1^2 \\ & - 12a_0^2 a_2 b_0 - 12a_0 b_0^2 b_1 + 10a_2 b_0^2 b_1 - 6a_0^2 a_2 b_1 + 8a_0^2 b_0 b_1 - 4a_0 a_1^3 - 12a_0^2 a_2 a_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
Q^4 : \quad & \alpha a_1^4 + 12\alpha a_0 a_2 a_1^2 + 6\alpha a_0^2 a_2^2 + 4\alpha a_1^3 b_0 + 3\alpha a_1^2 b_0^2 - 16\alpha a_2 a_1^2 b_0 - 4\alpha a_0 a_1^2 b_1 \\
& + \alpha a_1^2 b_0 b_1 - 21\alpha a_2 a_1 b_0^2 - \alpha a_0 a_1 b_1^2 + 24\alpha a_0 a_2 a_1 b_0 - 4\alpha a_0 a_1 b_0 b_1 - 18a_2 a_1 b_0 b_1 \\
& - 4a_1^2 b_0 b_1 + 4\alpha a_2 a_1 b_0 b_1 + 8\alpha a_2^2 b_0^2 + 6\alpha a_0 a_2 b_0^2 + \alpha a_0^2 b_1^2 - 16\alpha a_0 a_2^2 b_0 - 4\alpha a_0^2 a_2 b_1 \\
& + 2\alpha a_0 a_2 b_0 b_1 + a_1 b_1^3 \omega + 3a_2 b_0 b_1^2 \omega - 6a_1^3 b_0 - 11a_1^2 b_0^2 - a_1^2 b_1^2 + 24a_2 a_1^2 b_0 + 6a_0 a_1^2 b_1 \\
& - 6a_1 b_0^3 + 76a_2 a_1 b_0^2 + 4a_0 a_1 b_1^2 - 2a_1 b_0 b_1^2 - 36a_0 a_2 a_1 b_0 - 6a_1 b_0^2 b_1 + 14a_0 a_1 b_0 b_1 \\
& + 54a_2 b_0^3 + 2a_0 b_1^3 - 29a_2^2 b_0^2 - 24a_0 a_2 b_0^2 - 3a_0^2 b_1^2 - 4a_0 a_2 b_1^2 + 6a_0 b_0 b_1^2 + 8a_2 b_0 b_1^2 \\
& + 24a_0 a_2^2 b_0 + 6a_0 b_0^2 b_1 - 46a_2 b_0^2 b_1 + 6a_0^2 a_2 b_1 - a_1^4 - 12a_0 a_2 a_1^2 - 6a_0^2 a_2^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^5 : \quad & 4\alpha a_2 a_1^3 + 12\alpha a_0 a_2^2 a_1 + 16\alpha a_2 a_1^2 b_0 - 4\alpha a_2 a_1^2 b_1 + 12\alpha a_2 a_1 b_0^2 + \alpha a_2 a_1 b_1^2 \\
& + 44a_2 a_1 b_0 b_1 - 20\alpha a_2^2 a_1 b_0 - 12\alpha a_2 a_1 b_0 b_1 - 18\alpha a_2^2 b_0^2 + 16\alpha a_0 a_2^2 b_0 - 4\alpha a_0 a_2^2 b_1 \\
& + 7\alpha a_2^2 b_0 b_1 + a_2 b_1^3 \omega - 24a_2 a_1^2 b_0 + 6a_2 a_1^2 b_1 - 44a_2 a_1 b_0^2 - 6a_2 a_1 b_1^2 + 30a_2^2 a_1 b_0 \\
& - 24a_2 b_0^3 + 2a_2 b_1^3 + 64a_2^2 b_0^2 + 4a_0 a_2 b_1^2 - 32a_2 b_0 b_1^2 - 24a_0 a_2^2 b_0 + 6a_0 a_2^2 b_1 \\
& + 72a_2 b_0^2 b_1 - 26a_2^2 b_0 b_1 - 4a_0 a_2 b_0 b_1 - 4a_2 a_1^3 - 12a_0 a_2^2 a_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^6 : \quad & 4\alpha a_0 a_2^3 + 6\alpha a_1^2 a_2^2 - 8\alpha a_2^3 b_0 + 10\alpha a_2^2 b_0^2 + 2\alpha a_2^2 b_1^2 + 20\alpha a_1 a_2^2 b_0 + 12a_2^3 b_0 \\
& + 4\alpha a_0 a_2^2 b_1 - 8\alpha a_1 a_2^2 b_1 - 17\alpha a_2^2 b_0 b_1 - 3\alpha a_1 a_2 b_1^2 + 4\alpha a_1^2 a_2 b_1 + 8\alpha a_1 a_2 b_0 b_1 \\
& - 36a_2^2 b_0^2 - 8a_2^2 b_1^2 - 30a_1 a_2^2 b_0 - 6a_0 a_2^2 b_1 + 12a_1 a_2^2 b_1 + 60a_2^2 b_0 b_1 - 8a_2 b_1^3 - 2a_0 a_2 b_1^2 \\
& + 12a_1 a_2 b_1^2 + 48a_2 b_0 b_1^2 - 6a_1^2 a_2 b_1 - 36a_2 b_0^2 b_1 - 30a_1 a_2 b_0 b_1 - 4a_0 a_2^3 - 6a_1^2 a_2^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^7 : \quad & 4\alpha a_1 a_2^3 + 8\alpha a_2^3 b_0 - 4\alpha a_2^3 b_1 - 5\alpha a_2^2 b_1^2 + 8\alpha a_1 a_2^2 b_1 + 10\alpha a_2^2 b_0 b_1 + 2\alpha a_1 a_2 b_1^2 - 12a_2^3 b_0 \\
& + 6a_2^3 b_1 + 18a_2^2 b_1^2 - 12a_1 a_2^2 b_1 - 36a_2^2 b_0 b_1 + 12a_2 b_1^3 - 8a_1 a_2 b_1^2 - 24a_2 b_0 b_1^2 - 4a_1 a_2^3 = 0
\end{aligned}$$

$$Q^8 : \quad \alpha a_2^4 + 4\alpha a_2^3 b_1 + 3\alpha a_2^2 b_1^2 - 6a_2^3 b_1 - 11a_2^2 b_1^2 - 6a_2 b_1^3 - a_2^4 = 0,$$

con las variables desconocidas $\{a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, \alpha, \omega\}$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.33) con la restricción del método $a_2 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$ obtenemos, con la ayuda del software *Mathematica*, las siguientes familias de resultados:

Familia-1: Para $\alpha = 0$ tenemos: $a_0 = a_0$, $a_1 = -a_2 - b_0$, $a_2 = a_2$, $b_0 = a_0$, $b_1 = -a_2$ y $\omega = 2$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x, t) = \cosh(2t - x) - \sinh(2t - x) + 1 \quad (4.34)$$

Tomando la Ec. (4.34) con argumento variables

$$u(x, t) = \cosh(\beta t + \gamma x) - \sinh(\beta t + \gamma x) + 1 \quad (4.35)$$

Y utilizando para verificar que es solución de la Ec. (4.25) vemos que la Ec. (4.35) resulta ser solución si y solo

si $\alpha = 0$, $\beta = \gamma^4 + \gamma^2$ y $\gamma \neq 0$.

Familia-2: Si $\alpha = 0$ tenemos: $a_0 = 2b_0$, $a_1 = -4b_0$, $a_2 = 2b_0$, $b_0 = b_0$, $b_1 = -a_2$ y $\omega = 10$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x, t) = \sinh(20t - 2x) - \cosh(20t - 2x) + 1 \quad (4.36)$$

Tomando la Ec. (4.36) con argumentos variables

$$u(x, t) = \sinh(\beta t + \gamma x) - \cosh(\beta t + \gamma x) + 1 \quad (4.37)$$

Y utilizando para verificar que es solución de la Ec. (4.25) vemos que la Ec. (4.37) resulta ser solución si y solo si $\alpha = 0$, $\beta = \gamma^4 + \gamma^2$ y $\gamma \neq 0$.

Familia-3: Si $\alpha = 5$ tenemos: $a_0 = \frac{1}{4}(-2a_1 - a_2)$, $a_1 = a_1$, $a_2 = a_2$, $b_0 = -a_1 - \frac{1}{2}a_2$, $b_1 = -a_2$ y $\omega = 0$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x) = 2 \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \quad (4.38)$$

Tomando en cuenta la ecuación (4.38) con argumento y coeficiente variables

$$u(x) = \beta \cosh(\gamma x) \quad (4.39)$$

Y utilizando para verificar que es solución de la Ec. (4.25) vemos que la Ec. (4.39) resulta ser solución si y solo si $\beta \neq 0$, $\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}$ y $\alpha > 1$.

Familia-4: Si $\alpha = 2$ tenemos: $a_0 = \frac{1}{2}a_2$, $a_1 = -a_2$, $a_2 = a_2$, $b_0 = -a_1 - \frac{1}{2}a_2$, $b_1 = -a_2$ y $\omega = 0$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x) = -2 \sinh(x) \quad (4.40)$$

Tomando en cuenta la ecuación (4.40) con argumento y coeficiente variables

$$u(x) = \beta \sinh(\gamma x) \quad (4.41)$$

Y utilizando para verificar que es solución de la Ec. (4.25) vemos que la Ec. (4.41) resulta ser solución si y solo si $\beta \neq 0$, $\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}$ y $\alpha > 1$.

Familia-5: Si $\alpha = 3$ tenemos: $a_0 = \frac{a_2}{12-6\sqrt{3}}$, $a_1 = -\frac{1}{3}(\sqrt{3}+3)a_2$, $a_2 = a_2$, $b_0 = -a_1 - \frac{1}{2}a_2$, $b_1 = -a_2$ y $\omega = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x, t) = -\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{t}{9}} \left(e^{\frac{t}{3\sqrt{3}}} + e^x \right)}{(2\sqrt{3}-3)e^{\frac{t}{3\sqrt{3}}} + (2\sqrt{3}+3)e^x} \quad (4.42)$$

Familia-6: Si $\alpha = 3$ tenemos: $a_0 = \frac{a_2}{6(\sqrt{3}+2)}$, $a_1 = \frac{1}{3}(\sqrt{3}-3)a_2$, $a_2 = a_2$, $b_0 = -a_1 - \frac{1}{2}a_2$, $b_1 = -a_2$ y $\omega = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x, t) = e^{-\frac{t}{9} - \frac{x}{\sqrt{3}}} \left(e^{\frac{t}{3\sqrt{3}} + x} + 1 \right) \left(\sqrt{3}e^{\frac{t}{3\sqrt{3}} + x} + 7\sqrt{3} + 12 \right)^{\frac{1}{6}(\sqrt{3}-3)} \left((2\sqrt{3}+3)e^{\frac{t}{3\sqrt{3}} + x} + 26\sqrt{3} + 45 \right)^{\frac{1}{6}(-\sqrt{3}-3)} \quad (4.43)$$

Familia-7: Si $\alpha = 2$ tenemos: $a_0 = \frac{1}{4}(-2a_1 - a_2)$, $a_1 = a_1$, $a_2 = a_2$, $b_0 = \frac{1}{4}(\alpha - 1)(2a_1 + a_2)$, $b_1 = \frac{1}{2}(\alpha - 1)a_2$ y $\omega = 0$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x) = \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \quad (4.44)$$

Tomando en cuenta la ecuación (4.44) con argumento, coeficiente y potencia variables

$$u(x) = \beta \operatorname{sech}^\omega(\gamma x) \quad (4.45)$$

Y utilizando para verificar que es solución de la Ec. (4.25) vemos que la Ec. (4.45) resulta ser solución si y solo si $\alpha > 1$, $\beta \neq 0$, $\omega = \frac{2}{\alpha-1}$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}$

Familia-8: Si $\alpha = 5$ tenemos: $a_0 = \frac{1}{2}a_2$, $a_1 = -a_2$, $a_2 = a_2$, $b_0 = \frac{1}{4}(\alpha - 1)(2a_1 + a_2)$, $b_1 = \frac{1}{2}(\alpha - 1)a_2$ y $\omega = 0$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x) = \frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{-2\sinh^2(x) - 2\sinh(x)\cosh(x)}} \quad (4.46)$$

Familia-9: Si $\alpha = 3$ tenemos: $a_0 = \frac{1}{6}(\sqrt{3}+2)a_2$, $a_1 = -\frac{1}{3}(\sqrt{3}+3)a_2$, $a_2 = a_2$, $b_0 = \frac{1}{4}(\alpha - 1)(2a_1 + a_2)$, $b_1 = \frac{1}{2}(\alpha - 1)a_2$ y $\omega = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x, t) = - \left(3 \tanh \left(\frac{1}{18} (\sqrt{3}t + 9x) \right) + 2\sqrt{3} \right) e^{-\frac{t}{9} - \frac{x}{\sqrt{3}}} \quad (4.47)$$

Familia-10: Si $\alpha = 3$ tenemos: $a_0 = -\frac{1}{6}(\sqrt{3}-2)a_2$, $a_1 = \frac{1}{3}(\sqrt{3}-3)a_2$, $a_2 = a_2$, $b_0 = \frac{1}{4}(\alpha - 1)(2a_1 + a_2)$, $b_1 = \frac{1}{2}(\alpha - 1)a_2$ y $\omega = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x, t) = \left(3 \tanh \left(\frac{1}{18} (\sqrt{3}t - 9x) \right) + 2\sqrt{3} \right) e^{\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{t}{9}} \quad (4.48)$$

Familia-11: Si $\alpha = 1$ tenemos: $a_0 = \frac{b_0(a_1b_1 - a_2b_0)}{b_1^2}$, $a_1 = a_1$, $a_2 = a_2$, $b_0 = b_0$, $b_1 = b_1$ y $\omega = 0$ de donde la solución correspondiente es dada por

$$u(x) = \cosh \left(\frac{1}{4}x(\beta + x) \right) - \sinh \left(\frac{1}{4}x(\beta + x) \right), \quad (4.49)$$

donde $\beta = \frac{4a_2b_0 - 4b_1(2a_2 + a_1)}{b_1^2}$.

Después de utilizar el método generalizado de Kudryashov se obtuvieron cinco familias estacionarias y seis t -dependientes, donde la Familia-3 y la Familia-7 corresponden a los casos estacionarios expuestos en [36]. Estos resultados son relevantes ya que, hasta el momento, solo se habían encontrado soluciones estacionarias a la Ec. (4.25). En el tiempo restante del proyecto se pretende estudiar estas soluciones y obtener más familias con ayuda de otros métodos semi-analíticos.

4.5. Difusión biarmónica en canales estrechos

En el problema anterior, sección 4.4, se analiza la Ec. (4.25) que describe el proceso de fototaxia en algunas bacterias, notamos que contiene esencialmente tres términos: difusión inversa, no lineal y uno de cuarto orden. Se sabe que los términos de cuarto orden pueden modelar efectos de largo alcance en la ecuación de difusión de Fick [37, 38]. En algunas situaciones el flujo difusivo no es suficiente para describir el sistema, como para densidades altas o cuando hay efectos de memoria, por lo que es necesario considerar términos de largo alcance. En esta sección estudiamos la difusión con un término de cuarto orden en un canal estrecho para entender el papel de estos términos en la difusión unidimensional.

Consideremos un proceso difusivo de dos dimensiones dentro de un canal, que requiere considerar efectos de largo alcance. La dinámica de este sistema se puede describir a través de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbb{D} \cdot \nabla \rho(x, y, t)) - \nabla \cdot [\nabla \cdot (\mathbb{B} \nabla^2 \rho(x, y, t))], \quad (4.50)$$

donde $\rho(x, y, t)$ es la concentración o la densidad de probabilidad de las partículas que conforman al fluido, \mathbb{D} el coeficiente de difusión normal y \mathbb{B} el coeficiente de difusión biarmónica o de largo alcance. Como \mathbb{D} y \mathbb{B} son anisotrópicos, pueden representarse a través de las siguientes matrices:

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} B_x & 0 \\ 0 & B_y \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

con $D_x \neq D_y$ y $B_x \neq B_y$. Para el caso de que los coeficientes sean constantes, el desarrollo de la Ec. (4.50) es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & D_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} - B_x \left(\frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) \\ & - B_y \left(\frac{\partial^4 \rho}{\partial y^4} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Nótese que además de los primeros dos términos correspondientes al flujo difusivo, aparecen otros cuatro términos de cuarto orden, dos de ellos iguales.

Nuestro objetivo es obtener una ecuación similar a la de Fick-Jacobs para el flujo difusivo, que se obtiene de proyectar la ecuación de difusión bidimensional sobre la coordenada longitudinal que corresponde al eje del canal. Para ello utilizaremos el método de proyección desarrollado por Kalinay y Percus [39, 40], que es un

procedimiento iterativo que proporciona sucesivas correcciones a la ecuación proyectada, en términos de una escala que ayuda a separar los modos longitudinales relevantes de los transversales más rápidos. Para el orden más bajo primero integraremos la ecuación (4.52) en la coordenada transversal:

$$P(x, t) = \int_{A_1(x)}^{A_2(x)} \rho(x, y, t) dy, \quad (4.53)$$

donde A_1 y A_2 son los límites en la frontera inferior y superior del canal y $P(x, t)$ es la concentración marginal.

Cabe señalar que para los términos que involucran derivadas en x es necesario utilizar la regla de Leibnitz, ya que los límites de integración dependen de la variable respecto a la que se deriva, y en general es la siguiente:

$$\int^{g(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int^{g(x)} f(x, y) dy - f(x, g(x)) g'(x). \quad (4.54)$$

Con esto la integral en la coordenada transversal y de la Ec. (4.52) tiene los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & D_x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (A'_i \rho(x, A_i)) \right]_{i=1,2} - A'_i \frac{\partial \rho(x, A_i)}{\partial x} \bigg|_{i=1,2} + D_y \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial y} \bigg|_{y=A_1}^{y=A_2} - B_x \left[\frac{\partial^4 P}{\partial x^4} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} (A'_i \rho(x, A_i)) \right]_{i=1,2} \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(A'_i \frac{\partial \rho(x, A_i)}{\partial x} \right) \bigg|_{i=1,2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(A'_i \frac{\partial^2 \rho(x, A_i)}{\partial x^2} \right) \bigg|_{i=1,2} - A'_i \frac{\partial^3 \rho(x, A_i)}{\partial x^3} \bigg|_{i=1,2} - A'_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \rho(x, y)}{\partial y^2} \bigg|_{y=A_i} \right) \bigg|_{i=1,2} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \rho(x, y)}{\partial x \partial y} \bigg|_{y=A_1}^{y=A_2} \right) - B_y \left[\frac{\partial^3 \rho(x, y)}{\partial y^3} \bigg|_{y=A_1}^{y=A_2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 \rho(x, y)}{\partial x^2} \right) \bigg|_{y=A_1}^{y=A_2} \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para continuar, es necesaria la forma explícita de la condición de contorno de cero flujo. Esto es, el vector de flujo evaluado en las paredes del canal debe ser ortogonal al vector normal de estas. En este caso recordemos que el flujo tiene una componente de orden cúbico debido a efectos de largo alcance:

$$\mathbf{J} = - \left(D_x \frac{\partial \rho}{\partial x} - B_x \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \rho), D_y \frac{\partial \rho}{\partial y} - B_y \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \rho) \right), \quad (4.56)$$

la normal a la frontera $\mathbf{N}_i \propto (-A'_i, 1)$, por lo que $\mathbf{J} \cdot \mathbf{N}_i = 0$, implica lo siguiente:

$$\begin{aligned} & A'_i \left[D_x \frac{\partial \rho}{\partial x} - B_x \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) \right] \\ & = D_y \frac{\partial \rho}{\partial y} - B_y \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial y^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Sustituyendo la Ec. (4.57) en la Ec. (4.55) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & D_x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} (A'_i \rho(x, A_i)) \right]_{i=1,2} - B_x \left[\frac{\partial^4 P}{\partial x^4} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} (A'_i \rho(x, A_i)) \right]_{i=1,2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(A'_i \frac{\partial \rho(x, A_i)}{\partial x} \right) \Big|_{i=1,2} \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(A'_i \frac{\partial^2 \rho(x, A_i)}{\partial x^2} \right) \Big|_{i=1,2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \rho(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{y=A_1}^{y=A_2} \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Una primera aproximación es considerar la que la tasa a la que las partículas se difunden en la dirección transversal es muy grande en comparación con lo que ocurre en la dirección longitudinal donde la difusión es más lenta, por lo que puede considerarse que la concentración no depende de la coordenada transversal. Con esto la Ec. (4.53) implica que $P(x) = \rho(x, t)w(x)$, donde $w(x)$ es la función de ancho $w(x) = A_2(x) - A_1(x)$. Después, el primer término que multiplica el coeficiente de difusión se reduce al llamado operador de Fick-Jacobs y los primeros cuatro términos que multiplican el coeficiente biarmónico pueden reescribirse de manera similar, mientras que el último término se anula en esta aproximación. Finalmente, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D_x \frac{\partial}{\partial x} \left[w \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{w} \right) \right] - B_x \frac{\partial}{\partial x} \left[w \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{P}{w} \right) \right]. \quad (4.59)$$

Cabe señalar que esta expresión induce un flujo longitudinal con un término de tercer orden y con modificaciones debido a la geometría del canal dada por la función de ancho

$$J_x = -D_x w \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{w} \right) + B_x w \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{P}{w} \right). \quad (4.60)$$

Con este procedimiento obtuvimos la ecuación Fick-Jacobs biarmónica, Ec. (4.59), que considera efectos de largo alcance en un proceso de difusión. En el tiempo restante del posgrado se pretende estudiar esta ecuación más a detalle, realizar algunos ejemplos y se está terminando un artículo para su envío a revisión.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

A lo largo del proyecto doctoral se ha estudiado la ecuación del modelo continuo para la fototaxia y se obtuvieron once familias de soluciones tipo onda viajera. Dando la posibilidad de utilizar estas ecuaciones para estudiar el movimiento en cada paso de tiempo, ya que hasta el momento solo se tenían dos soluciones estacionarias.

Además, al estudiar los métodos semi-analíticos, se pudieron abordar tres diferentes problemas provenientes de las ciencias naturales e ingeniería. Primero, se aplicó el método LADM en la ecuación de Bethe y los resultados se publicaron en [20]. Segundo, se estudio un modelo SIR con términos no lineales que modelan el efecto psicológico y de los medios en la propagación de la enfermedad, en este trabajo se hizo un ajuste de parámetros a partir de datos reales de COVID-19 y los resultados se han enviado a revisión para su eventual publicación. Tercero, se aplicó el método de Kudryashov a la ecuación de Schamel-Kawahara y los resultados están próximos a publicarse [32].

Por otra parte, para estudiar el término de cuarto orden en la ecuación del modelo de fototaxia, se planteó un modelo de difusión y se obtuvieron correcciones hasta cuarto orden para la ecuación Fick-Jacobs que pueden modelar efectos de largo alcance. Se propone analizar los efectos de ese término y mandar un artículo para su revisión.

En el tiempo restante del proyecto se pretenden obtener más soluciones al problema de fototaxia, ver cuáles tienen sentido biológico y publicar los resultados. Incluso, se está desarrollando el código de un método numérico con la finalidad de obtener otro tipo de soluciones y poder comparar los resultados.

Bibliografía

- [1] A.I. Volpert, V.A. Volpert, and V.A. Volpert. *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society.
- [2] G. Adomian. *Solving frontier problems of physics the decomposition method*. Fundamental Theories of Physics. Springer, Dordrecht, 1994.
- [3] Abdul-Majid Wazwaz. A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators. *Applied Mathematics and Computation*, 111(1):33 – 51, 2000.
- [4] E. Babolian and Sh. Javadi. New method for calculating Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 153(1):253 – 259, 2004.
- [5] Jun-Sheng Duan. Convenient analytic recurrence algorithms for the Adomian polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 217(13):6337 – 6348, 2011.
- [6] Jun-Sheng Duan. New recurrence algorithms for the nonclassic Adomian polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(8):2961 – 2977, 2011.
- [7] Suheil A. Khuri. A laplace decomposition algorithm applied to a class of nonlinear differential equations. *J. Appl. Math.*, 1(4):141–155, 01 2002.
- [8] Abdul-Majid Wazwaz. The combined Laplace transform-Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 216(4):1304 – 1309, 2010.
- [9] R. Rach, G. Adomian, and R.E. Meyers. A modified decomposition. *Computers and Mathematics with Applications*, 23(1):17 – 23, 1992.
- [10] G. Adomian and R. Rach. Transformation of series. *Applied Mathematics Letters*, 4(4):69 – 71, 1991.
- [11] G. Adomian and R. Rach. Nonlinear transformation of series-part ii. *Computers and Mathematics with Applications*, 23(10):79 – 83, 1992.
- [12] Nikolay A. Kudryashov. One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6):2248–2253, 2012.
- [13] Ahmed H. Arnous, Anjan Biswas, Yakup Yildirim, Qin Zhou, Wenjun Liu, Ali S. Alshomrani, and Hashim M. Alshehri. Cubic-quartic optical soliton perturbation with complex Ginzburg-Landau equation by the enhanced Kudryashov’s method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 155:111748, 2022.
- [14] Md Islam, Kamruzzaman Khan, and M. Ali Akbar. Generalized Kudryashov method for solving some (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations. *New Trends in Mathematical Sciences*, 3, 06 2015.
- [15] H. Bethe. Bremsformel für elektronen relativistischer geschwindigkeit. *Zeitschrift für Physik*, 76(5):293–299, 1932.
- [16] David Robert Grimes, Daniel R. Warren, and Mike Partridge. An approximate analytical solution of the Bethe equation for charged particles in the radiotherapeutic energy range. *Scientific Reports*, 7(1):9781, 2017.
- [17] Hieu T. Nguyen-Truong. Modified Bethe formula for low-energy electron stopping power without fitting parameters. *Ultramicroscopy*, 149:26–33, 2015.
- [18] Ji-Huan He. Application of he Chengtian’s interpolation to Bethe equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(11):2427–2430, 2009. New Analytical Methods and Applications.
- [19] J R Action and P T Squire. *Solving equations with physical understanding*. Adam Hilger, Bristol, C 1985. Includes index.

- [20] O González-Gaxiola, G Chacón-Acosta, and A León-Ramírez. Approximate Analytical Solution of the Nonlinear Bethe Equation. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 5(2):25, 2019.
- [21] William Ogilvy Kermack, A. G. McKendrick, and Gilbert Thomas Walker. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 115(772):700–721, 1927.
- [22] Eric J. Avila-Vales and Ángel G. Cervantes-Pérez. Global stability for SIRS epidemic models with general incidence rate and transfer from infectious to susceptible. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 25(3):637–658, 2019.
- [23] Dongmei Xiao and Shigui Ruan. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate. *Mathematical Biosciences*, 208(2):419–429, 2007.
- [24] Jingan Cui, Yonghong Sun, and Huaiping Zhu. The impact of media on the control of infectious diseases. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 20(1):31–53, 2008.
- [25] Ministero della Salute. Monitoraggio settimanale covid-19, 2020. Last accessed November 2021.
- [26] Istituto Nazionale di Statistica. Population and households, 2020. Last accessed November 2021.
- [27] A León-Ramírez, G Chacón-Acosta, and O González-Gaxiola. Rach-Adomian-Meyers decomposition method applied to a SIR-like model with nonlinear media and psychological effects. *Sometido a: Applications of Mathematics*.
- [28] Marco Amabili. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press, 2008.
- [29] Vladimir I. Erofeev. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates, and shells (a review). *Acoustical Physics*, 48:643, 2002.
- [30] L.I. Manevitch, V.V. Smirnov, M. Strozzi, and F. Pellicano. Nonlinear optical vibrations of single-walled carbon nanotubes. *Procedia Engineering*, 199:705–710, 2017. X International Conference on Structural Dynamics, EUROLYN 2017.
- [31] A. I. Zemlyanukhin, I. V. Andrianov, A. V. Bochkarev, and L. I. Mogilevich. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dynamics*, 98(1):185–194, 2019.
- [32] O González-Gaxiola, A León-Ramírez, and G Chacón-Acosta. Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the schamel-kawahara. *Aceptado en: Russian Journal of Nonlinear Dynamics*.
- [33] Doron Levy and Tiago Requeijo. Stochastic models for phototaxis. *Bull Math Biol*, 70(6):1684–1706, Aug 2008.
- [34] Amanda Galante, Susanne Wisen, Devaki Bhaya, and Doron Levy. Modeling local interactions during the motion of cyanobacteria. *Journal of theoretical biology*, 309:147–158, 09 2012.
- [35] Amanda Galante and Doron Levy. Modeling selective local interactions with memory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 260:176–190, 2013. Emergent Behaviour in Multi-particle Systems with Non-local Interactions.
- [36] Paul-Christopher Chavy-Waddy and Theodore Kolokolnikov. A local PDE model of aggregation formation in bacterial colonies. *Nonlinearity*, 29(10):3174–3185, aug 2016.
- [37] James D Murray. *Mathematical Biology I*. 2002.
- [38] James D Murray. *Mathematical Biology II*. 2003.
- [39] P. Kalinay and J. K. Percus. Projection of two-dimensional diffusion in a narrow channel onto the longitudinal dimension. *The Journal of Chemical Physics*, 122(20):204701, 2005.
- [40] P. Kalinay and J. K. Percus. Corrections to the Fick-Jacobs equation. *Phys. Rev. E*, 74:041203, Oct 2006.